TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

23 januari 2013, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen en 3 open vragen. Beide onderdelen zijn in totaal goed voor **4,5 punten**. (Je cijfer is minimaal een 1.) Gebruik dit gegeven om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, rekenmachines of andere bronnen is **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
  - Alle meerkeuzevragen wegen even zwaar.
  - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord. (NB: Ik zal een vorm van **gokcorrectie** toepassen.)
  - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf, als je zeker van je antwoorden bent, de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
  - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
  - Vul op het meerkeuzeformulier **zowel met cijfers als met blokjes** je studienummer in.
  - Zet je **handtekening** op je MAF. *Doe dat nu maar gelijk, dan heb je dat in ieder geval gedaan.*
- Wat betreft de **open vragen**:
  - Alle open vragen wegen even zwaar.
  - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
  - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven.
  - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
  - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets over aan mijn interpretatie.
  - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 4.
- Tot slot: **Veel succes!**

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de formule $F = (\neg(p_0 \to \neg p_{13}) \vee (p_0 \wedge p_{13}))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

   A. $v(F) = \max(1 - \max(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \min(v(p_0), v(p_{13})))$

   B. $v(F) = 1 - \max(1 - \max(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \min(v(p_0), v(p_{13})))$

   C. $v(F) = \max(1 - \min(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \max(v(p_0), v(p_{13})))$

   D. $v(F) = 1 - \max(1 - \min(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \max(v(p_0), v(p_{13})))$

2. Beschouw de volgende recurrente betrekking.

$$\begin{aligned} f(p_i) &= 1 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\ f(\neg A) &= f(A) + 1 && \text{voor } A \in PROP \\ f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

   Welke waarde kent de hierboven gedefinieerde functie f toe aan elke formule in $PROP$?

   A. De lengte van de formule.

   B. Het aantal subformules van de formule.

   C. Het aantal voorkomens van connectieven in de formule.

   D. Het aantal voorkomens van propositievariabelen in de formule.

3. Zij gegeven een formule F in DNV met > 1 disjunctieleden. Als in precies één disjunctielid van F complementaire literalen voorkomen, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen over F?

   A. F is een contingentie.

   B. F is een tautologie.

   C. F is geen contradictie.

   D. F is geen contingentie.

4. Stel dat $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$ dusdanig zijn, dat $\Gamma \models C$ waar is. Welke van onderstaande uitspraken is dan met zekerheid waar?

   A. Als $\Gamma = \emptyset$, dan is C geen contingentie.

   B. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C geen contingentie.

   C. Als C geen contingentie is, dan is $\Gamma \neq \emptyset$.

   D. Als C geen contingentie is, dan is $\Gamma = \emptyset$.

5. Stel dat $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$ dusdanig zijn dat alle takken in een boom voor de redenering $\Gamma \therefore C$ **niet** sluiten. Wat weten we dan zeker?

   A. C is een contradictie.

   B. C is geen tautologie.

   C. Γ heeft geen model.

   D. $\Gamma \models \neg C$.

6. Beschouw de volgende redenering.

   Redenering. *Voor alle formules A en $B \in PROP$ geldt:* $A \models B$ *of* $\sim(B \models A)$.

   De redenering is niet geldig. Welke formules vormen geen tegenvoorbeeld?

   A. $A = p$ en $B = \neg(p \to p)$

   B. $A = p \to p$ en $B = p$

   C. $A = p$ en $B = p$

   D. $A = p \to p$ en $B = \neg(p \to p)$

7. Stel dat A en B formules uit $PROP$ zijn waarvoor geldt $A \models B$, en $\sim\models \neg A$. Laat M_A en M_B de verzamelingen modellen van formules A respectievelijk B zijn. (Een model van een formule is een valuatie die de formule waar maakt.) Welke uitspraak is dan zeker waar?
   - A. $M_B \neq \emptyset$.
   - B. $M_A = \emptyset$.
   - C. $M_B \subseteq M_A$.
   - D. Geen van bovenstaande.

8. Zij A en B formules uit $PROP$, waarvoor geldt dat $\models \neg A \vee \neg B$. Welke uitspraak is dan **niet** waar?
   - A. $\models \neg A$ of $\models \neg B$
   - B. $\neg A \models A \to \neg B$
   - C. $\models A \to \neg B$
   - D. $B \models \neg A$

9. Stel dat we bij het maken van een afleiding in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie van Fitch, gevorderd zijn tot de volgende situatie (die maar *een deel* van de totale afleiding weergeeft).

$\vdots$	
A	hypothese
A	hypothese
$\vdots$	
$\langle$afleiding van $C\rangle$	
$\vdots$	
C	
$\ldots$	?

   Op de plek van de horizontale puntjes "...", direct onder het meest rechtse hypothese-interval, kunnen we verschillende dingen opschrijven, met een verantwoording op de plek van het vraagteken ("?"). Welke verantwoording kan op de plek van het vraagteken niet komen te staan?
   - A. "hypothese"
   - B. "$\to$-intro"
   - C. "$\vee$-intro"
   - D. "$\to$-elim"

10. Stel dat A en B verzamelingen zijn waarvoor geldt $A \subseteq (B \cap A)$ en $B \subseteq A$. Welke uitspraak is dan niet waar?
    - A. $A = B$
    - B. $A \subseteq B$
    - C. $(A \cup B) \subset (A \cap B)$
    - D. $(B - A) = \emptyset$.

11. Beschouw de volgende redenering, die niet geldig is.

    Redenering. *Voor alle verzamelingen A, B en C geldt: Als $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$, dan $(B - C) = \emptyset$.*

    Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld?

    A. $A = \{0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0\}$
    B. $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 1\}$
    C. $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 2\}$
    D. $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $C = \{0, 1\}$

12. Beschouw de verzameling $LIT - (ATOM \cap FORM)$. Welke van de volgende formules, in een eerste-ordetaal met een toepasselijk niet-logisch alfabet, is een element van deze verzameling?

    A. $\neg\exists x_1 P_6(x_1, c_0)$
    B. $(f_2(c_0) = f_{13}(c_1, f_2(c_3)))$
    C. $\neg(x_3 = f_2(x_1))$
    D. $(\forall x_0 P_5(x_0) \to P_2(x_3))$

13. Stel dat we volgens de boommethode een boom maken om de geldigheid van een redenering in een zekere eerste-ordetaal te onderzoeken. Stel verder dat we in een zekere tak van die boom (onder andere) de volgende formules hebben opgeschreven (waarbij ik voor de duidelijkheid de verantwoording heb weggelaten).

    $$\begin{array}{ll} i. & \forall y(\forall x P(x) \to R(b, y)) \\ j. & P(a) \to \exists y Q(y) \\ k. & P(a) \\ l. & \exists x \forall y R(x, y) \end{array}$$

    Op welke van de volgende manieren mag deze tak worden vervolgd?

A.	$m.$	$\exists y Q(y)$	$\to$-regel, j, k
B.	$m.$	$\forall y R(b, y)$	$\exists$-regel, l
C.	$m.$	$P(a) \to Q(e)$	$\exists$-regel, j
D.	$m.$	$\forall x P(x) \to R(b, a)$	$\forall$-regel, i

14. Zij gegeven eerste-ordetaal K met 1-plaatsige predicaatsymbolen P en Q en 2-plaatsig predicaatsymbool R. Zij ook gegeven de structuur $\mathcal{T} = \langle D; R_0, R_1, R_2 \rangle$, waar $D = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$, $R_0 = P^{\mathcal{T}} = \{d_0, d_1\}$, $R_1 = Q^{\mathcal{T}} = \{d_1, d_2\}$ en $R_2 = R^{\mathcal{T}} = \{(d_3, d_0), (d_0, d_1), (d_1, d_0), (d_1, d_2), (d_2, d_1), (d_2, d_0)\}$. Welke van de volgende formules is waar in $\mathcal{T}$?

    (Hint: maak eerst een plaatje van de structuur.)

    A. $\forall x((\neg P(x) \to Q(x)) \vee R(x, x))$.
    B. $\forall x(P(x) \to \forall y((\neg P(y) \wedge Q(y)) \to R(y, x)))$.
    C. $\forall x((P(x) \wedge \neg Q(x)) \to \forall y R(y, x))$.
    D. $\forall x \forall y \forall z((R(x, y) \wedge R(y, z))) \to R(x, z))$.

15. Beschouw de volgende redenering in de eerste-ordetaal T, die tweeplaatsig functiesymbool f bevat.

    Redenering. $\therefore \forall x \forall y(f(x, y) = f(y, x))$.

    Beschouw nu de structuur $\mathcal{A} = \langle D; g_0 \rangle$ voor deze taal T met domein $D = \{0, 1, 2\}$, waar $g_0 = f^{\mathcal{A}}$. Niet alle structuren die we verkrijgen door g_0 in te vullen vormen een tegenvoorbeeld voor de redenering. In welke van de volgende situaties toont structuur $\mathcal{A}$ wèl aan dat de gegeven redenering niet geldig is?

    A. Als $g_0 = \{(2,1,2), (1,1,0), (1,2,2), (0,1,1), (0,0,1), (0,2,2), (2,2,0), (2,0,2), (1,0,0)\}$
    B. Als $g_0 = \{(1,0,2), (0,1,2), (0,2,2), (1,1,1), (2,0,2), (1,2,0), (2,2,2), (2,1,0), (0,0,1)\}$
    C. Als $g_0 = \{(0,2,0), (1,1,2), (0,1,1), (0,0,2), (1,2,1), (1,0,1), (2,0,0), (2,2,1), (2,1,1)\}$
    D. Als $g_0 = \{(0,1,0), (2,2,2), (1,1,1), (2,0,1), (1,0,0), (1,2,2), (0,0,1), (2,1,2), (0,2,1)\}$

Open vragen

1. **Fitch**

   Geef in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende afleiding.

   Stelling. $\neg(q \to \neg(p \vee q)) \vdash q$.

   Je mag regels van de boommethode of de resolutieregel hier dus niet gebruiken, maar alléén de afleidingsregels van het *niet-uitgebreide* systeem van Fitch.

2. **Boommethode**

   De volgende redenering in een zekere (toepasselijk gedefinieerde) eerste-ordetaal L is niet geldig.

   Redenering. $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y)), \forall x(P(x) \to \neg\exists z(R(x,z) \wedge P(z))) \therefore P(a) \vee P(b)$.

   Beantwoord onderstaande vragen, en geef (met letters in de kantlijn) duidelijk aan welk deel van je antwoord bij welke deelvraag hoort.

   (a) Hoe kun je, in het algemeen, aan een boom zien of een redenering wel of niet geldig is?

   (b) Maak een boom voor de redenering hierboven.

   (c) Leg duidelijk uit hoe je, in het algemeen, uit een boom voor een ongeldige redenering een tegenvoorbeeld kunt bepalen.

   (d) Geef een tegenvoorbeeld dat de ongeldigheid van de redenering hierboven aantoont. (Je mag dit in de vorm van een plaatje doen, of als formeel gedefinieerde wiskundige structuur.)

   (e) Leg duidelijk uit hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid van de redenering hierboven aantoont.

3. **Meta-theorie**

   Bepaal of de volgende redenering geldig is of niet. Als je denkt dat hij geldig is, geef dan een bewijs dat dit aantoont. Als je denkt dat de redenering niet geldig is, geef dan een tegenvoorbeeld (in de vorm van concrete formules voor A, B en C) dat dit aantoont, en leg uit hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid van de redenering aantoont.

   Redenering. *Voor alle formules A, B en $C \in PROP$ geldt: Als* $B \models A \to C$ *dan* $A \models B \to C$.

Einde tentamenopgaven