TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

23 januari 2013, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen en 3 open vragen. Beide onderdelen zijn in totaal goed voor **4,5 punten**. (Je cijfer is minimaal een 1.) Gebruik dit gegeven om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen, rekenmachines of andere bronnen is **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
  - Alle meerkeuzevragen wegen even zwaar.
  - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord. (NB: Ik zal een vorm van **gokcorrectie** toepassen.)
  - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf, als je zeker van je antwoorden bent, de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
  - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
  - Vul op het meerkeuzeformulier **zowel met cijfers als met blokjes** je studienummer in.
  - Zet je **handtekening** op je MAF. *Doe dat nu maar gelijk, dan heb je dat in ieder geval gedaan.*
- Wat betreft de **open vragen**:
  - Alle open vragen wegen even zwaar.
  - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
  - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven.
  - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
  - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets over aan mijn interpretatie.
  - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 10.
- Tot slot: **Veel succes!**

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de formule $F = (\neg(p_0 \to \neg p_{13}) \vee (p_0 \wedge p_{13}))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

   A. $v(F) = \max(1 - \max(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \min(v(p_0), v(p_{13})))$
   B. $v(F) = 1 - \max(1 - \max(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \min(v(p_0), v(p_{13})))$
   C. $v(F) = \max(1 - \min(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \max(v(p_0), v(p_{13})))$
   D. $v(F) = 1 - \max(1 - \min(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \max(v(p_0), v(p_{13})))$

Antwoord:

$$\begin{aligned} v(F) &= v((\neg(p_0 \to \neg p_{13}) \vee (p_0 \wedge p_{13}))) \\ &= \max(v(\neg(p_0 \to \neg p_{13})), v((p_0 \wedge p_{13}))) \\ &= \max(1 - v((p_0 \to \neg p_{13})), \min(v(p_0), v(p_{13}))) \\ &= \max(1 - \max(1 - v(p_0), v(\neg p_{13})), \min(v(p_0), v(p_{13}))) \\ &= \max(1 - \max(1 - v(p_0), 1 - v(p_{13})), \min(v(p_0), v(p_{13}))) \end{aligned}$$

2. Beschouw de volgende recurrente betrekking.

$$\begin{aligned} f(p_i) &= 1 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\ f(\neg A) &= f(A) + 1 && \text{voor } A \in PROP \\ f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

   Welke waarde kent de hierboven gedefinieerde functie f toe aan elke formule in $PROP$?

   A. De lengte van de formule.
   B. Het aantal subformules van de formule.
   C. Het aantal voorkomens van connectieven in de formule.
   D. Het aantal voorkomens van propositievariabelen in de formule.

Antwoord: (Ik geef hieronder bij de foute antwoorden niet steeds àlle redenen waarom het antwoord fout is.)

A. De functie geeft niet de lengte van de formule, want dan zou de 1 in de laatste clausule een 3 zijn.

B. Dit is het correcte antwoord: een propositievariabele heeft (is) één subformule, als je een negatie vóór een formule zet, komt er één subformule bij, en als je twee subformules met een tweeplaatsig connectief met elkaar verbindt, komt er ook één subformule bij.

C. De functie geeft niet het aantal voorkomens van connectieven, want we zien dat $f(p_i) = 1$, terwijl een propositievariabele geen connectief bevat.

D. Het is ook niet het aantal voorkomens van proposievariabelen, want dan had er in de laatste twee clausules geen "$+1$" gestaan.

3. Zij gegeven een formule F in DNV met > 1 disjunctieleden. Als in precies één disjunctielid van F complementaire literalen voorkomen, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen over F?

   A. F is een contingentie.
   B. F is een tautologie.
   C. F is geen contradictie.
   D. F is geen contingentie.

Antwoord: De formule F is een disjunctie van conjuncties, dus ieder disjunctielid van F is een conjunctie. Er zijn méér dan één disjunctieleden, en er is precies één disjunctielid met complementaire literalen, dus er is ook tenminste één disjunctielid *zonder* complementaire literalen.

A. De formule hoeft geen contingentie te zijn, neem bijvoorbeeld $F = (p \wedge \neg p) \vee p \vee \neg p$, een tautologie.

B. De formule hoeft geen tautologie te zijn, neem bijvoorbeeld $F = (p \wedge \neg p) \vee p$, een contingentie.

C. De formule is geen contradictie, want er is tenminste één disjunctielid waarin géén complementaire literalen voorkomen, en dat dus vervulbaar is. Dus is de hele formule vervulbaar.

D. De formule kan een contingentie zijn, bijvoorbeeld $F = (p \wedge \neg p) \vee p$.

4. Stel dat $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$ dusdanig zijn, dat $\Gamma \models C$ waar is. Welke van onderstaande uitspraken is dan met zekerheid waar?
   A. Als $\Gamma = \emptyset$, dan is C geen contingentie.
   B. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C geen contingentie.
   C. Als C geen contingentie is, dan is $\Gamma \neq \emptyset$.
   D. Als C geen contingentie is, dan is $\Gamma = \emptyset$.

Antwoord:

A. Als $\Gamma = \emptyset$, dan moet C een tautologie zijn, want er is gegeven dat $\Gamma \models C$ waar is. Alle valuaties zijn namelijk model voor de lege verzameling, dus als $\Gamma = \emptyset$ mag er geen valuatie bestaan die de conclusie onwaar maakt, want dan zou die valuatie een tegenvoorbeeld zijn, en zou $\Gamma \models C$ niet waar zijn. De formule C is dus een tautologie, en dus inderdaad zeker géén contingentie als $\Gamma = \emptyset$.

B. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan heeft de redenering dus één of meer premissen. De formule C kan dan best een contingentie zijn, zolang valuaties die C onwaar maken, maar niet alle premissen in Γ waar maken.

C. Als C geen contingentie is, dan kan Γ best leeg zijn, namelijk als C een tautologie is.

D. Als C geen contingentie is, hoeft Γ niet leeg te zijn, bijvoorbeeld als C een tautologie is.

(Begrijp je waarom ik "namelijk" vs. "bijvoorbeeld" gebruikte bij C en D?)

5. Stel dat $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$ dusdanig zijn dat alle takken in een boom voor de redenering $\Gamma \therefore C$ **niet** sluiten. Wat weten we dan zeker?
   A. C is een contradictie.
   B. C is geen tautologie.
   C. Γ heeft geen model.
   D. $\Gamma \models \neg C$.

Antwoord: Alle takken sluiten niet, dus de redenering $\Gamma \therefore C$ is niet geldig.

A. De redenering is ongeldig, dus kan C een contradictie zijn, maar het hoeft niet. De conclusie kan ook een contingentie zijn, zolang valuaties die alle premissen waar maken, C maar niet onwaar maken.

B. Het goede antwoord is B: C is geen tautologie, want als C dat wel zou zijn, volgt C uit alle mogelijke verzamelingen premissen, en sluit geen enkele boom voor een redenering met C als conclusie.

C. Γ heeft wel een model, want de redenering is niet geldig, en er is dus een tegenvoorbeeld, en dat vervult per definitie $\Gamma \cup \{\neg C\}$, dus ook Γ.

D. Omdat de redenering ongeldig is, volgt C niet uit Γ, maar dat betekent niet dat $\neg C$ uit Γ volgt, dus D is ook niet waar.

6. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. *Voor alle formules A en $B \in PROP$ geldt:* $A \models B$ *of* $\sim (B \models A)$.

De redenering is niet geldig. Welke formules vormen geen tegenvoorbeeld?

A. $A = p$ en $B = \neg(p \to p)$

B. $A = p \to p$ en $B = p$

C. $A = p$ **en** $B = p$

D. $A = p \to p$ en $B = \neg(p \to p)$

Antwoord: Een tegenvoorbeeld bestaat uit formules A en B waarvoor geldt dat *beide disjuncten onwaar* zijn. (In een tegenvoorbeeld volgt formule B dus niet uit A, maar A wel uit B). De vraag is welke formules *géén* tegenvoorbeeld vormen, dus dat zijn formules waarvoor tenminste één disjunct waar is.

A. Als $A = p$ en $B = \neg(p \to p)$, is B een contradictie ($\neg(p \to p) \equiv p \wedge \neg p$), en A een contingentie, dus volgt B niet uit A, maar A wel uit B. Deze formules vormen dus wèl een tegenvoorbeeld.

B. Als $A = p \to p$ en $B = p$, is A een tautologie, en B een contingentie, dus volgt B niet uit A, maar A wel uit B. Ook deze formules vormen dus een tegenvoorbeeld.

C. Als $A = p$ en $B = p$ volgt B uit A, dus dit is geen tegenvoorbeeld.

D. Als $A = p \to p$ en $B = \neg(p \to p)$ is A een tautologie, en B een contradictie, dus volgt B niet uit A, maar A wel uit B. Deze formules vormen dus een tegenvoorbeeld.

7. Stel dat A en B formules uit $PROP$ zijn waarvoor geldt $A \models B$, en $\sim \models \neg A$. Laat M_A en M_B de verzamelingen modellen van formules A respectievelijk B zijn. (Een model van een formule is een valuatie die de formule waar maakt.) Welke uitspraak is dan zeker waar?

A. $M_B \neq \emptyset$**.**

B. $M_A = \emptyset$.

C. $M_B \subseteq M_A$.

D. Geen van bovenstaande.

Antwoord: Omdat $\sim \models \neg A$ waar is, is A geen contradictie, en bestaat er dus een valuatie die A waar maakt. Omdat bovendien $A \models B$ waar is, bestaat er dus zeker ook een valuatie die B waar maakt, dus $M_B \neq \emptyset$.

8. Zij A en B formules uit $PROP$, waarvoor geldt dat $\models \neg A \vee \neg B$. Welke uitspraak is dan **niet** waar?
   A. $\models \neg A$ **of** $\models \neg B$
   B. $\neg A \models A \to \neg B$
   C. $\models A \to \neg B$
   D. $B \models \neg A$

Antwoord:

A. Dit is niet waar. Als namelijk $A = p$ en $B = \neg p$, is $\neg A \vee \neg B = \neg p \vee \neg\neg p \equiv \neg p \vee p$ en dat is een tautologie. Maar $\neg A$ noch $\neg B$ is een tautologie.

B. Deze uitspraak is waar voor *alle* A en B, ongeacht of $\models \neg A \vee \neg B$ waar is: Voor elke valuatie waarvoor geldt $v(B) = 1$ geldt namelijk ook $v(\neg B \to \neg A) = \max(1-v(\neg B), v(\neg A)) = \max(1-(1-v(B)), 1-v(A)) = \max(1-(1-1), 1-v(A)) = \max(1-0, 1-v(A)) = \max(1, 1-v(A)) = 1$, ongeacht de waarde van $v(A)$.

C. Omdat $\neg A \vee \neg B \equiv A \to \neg B \equiv B \to \neg A$, geldt als $\models \neg A \vee \neg B$ waar is, ook $\models B \to \neg A$.

D. Als $\models \neg A \vee \neg B$ waar is, dan geldt ook dat $\models A \to \neg B$, en dus dat $A \models \neg B$.

9. Stel dat we bij het maken van een afleiding in het (niet-uitgebreide) systeem voor natuurlijke deductie van Fitch, gevorderd zijn tot de volgende situatie (die maar *een deel* van de totale afleiding weergeeft).

```
| ⋮
| | A                          hypothese
| |---
| | | A                        hypothese
| | |---
| | | ⋮
| | | ⟨afleiding van C⟩
| | | ⋮
| | | C
| | ...                        ?
| |
|
```

Op de plek van de horizontale puntjes "...", direct onder het meest rechtse hypothese-interval, kunnen we verschillende dingen opschrijven, met een verantwoording op de plek van het vraagteken ("?"). Welke verantwoording kan op de plek van het vraagteken niet komen te staan?
   A. "hypothese"
   B. "$\to$-intro"
   C. "$\vee$-intro"
   D. "$\to$-elim"

Antwoord:

A. Dit kan altijd.

B. Dit kan best, je mag bijvoorbeeld $A \to C$ afleiden.

C. Dit kan best, bijvoorbeeld $A \vee B$ (omdat we A al waar hebben verondersteld).

D. Dit kan niet, want je hebt niet een implicatie en het antecedent ervan binnen het huidige HI.

10. Stel dat A en B verzamelingen zijn waarvoor geldt $A \subseteq (B \cap A)$ en $B \subseteq A$. Welke uitspraak is dan niet waar?

    A. $A = B$

    B. $A \subseteq B$

    C. $(A \cup B) \subset (A \cap B)$

    D. $(B - A) = \emptyset$.

> **Antwoord:** Omdat $A \subseteq (B \cap A)$ weten we dat $A \subseteq B$ waar is. Omdat daarnaast $B \subseteq A$ waar is, weten we dat $A = B$ waar is.
>
> A. Het is dus inderdaad zo dat $A = B$.
>
> B. Dit is dus ook waar.
>
> C. Dit is niet waar, want dit zou betekenen dat er een element in $A \cap B$ zit dat niet in $A \cup B$ zit, maar die verzamelingen zijn gelijk aan elkaar (en aan A, en ook aan B).
>
> D. Dit is waar, want A en B zijn gelijk aan elkaar.

11. Beschouw de volgende redenering, die niet geldig is.

    Redenering. *Voor alle verzamelingen A, B en C geldt: Als $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$, dan $(B - C) = \emptyset$.*

    Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld?

    A. $A = \{0\}$**,** $B = \{0, 1, 2\}$**,** $C = \{0\}$

    B. $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 1\}$

    C. $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 2\}$

    D. $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $C = \{0, 1\}$

> **Antwoord:** Een tegenvoorbeeld wordt gevormd door een drietal verzamelingen waarvoor wèl het antecedent, maar nìet het consequent waar is. Dus $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$ moet waar zijn, maar $B - C = \emptyset$ mag niet waar zijn.
>
> A. $A \cap B = \{0\}$, $A \cap C = \{0\}$, dus $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$, en $B - C = \{1, 2\} \neq \emptyset$ dus dit is een tegenvoorbeeld.
>
> B. $A \cap B = \{0, 1\}$, $A \cap C = \{0, 1\}$, dus $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$, maar $B - C = \emptyset$, dus dit is geen tegenvoorbeeld.
>
> C. $A \cap B = \{1\}$, $A \cap C = \{2\}$, dsu $(A \cap B) \not\subseteq (A \cap C)$, dus dit is geen tegenvoorbeeld.
>
> D. $A \cap B = \emptyset$, dus $(A \cap B) \subseteq (A \cap C)$, maar $B - C = \emptyset$, dus dit is geen tegenvoorbeeld.

12. Beschouw de verzameling $LIT - (ATOM \cap FORM)$. Welke van de volgende formules, in een eerste-ordetaal met een toepasselijk niet-logisch alfabet, is een element van deze verzameling?

    A. $\neg \exists x_1 P_6(x_1, c_0)$

    B. $(f_2(c_0) = f_{13}(c_1, f_2(c_3)))$

    C. $\neg(x_3 = f_2(x_1))$

    D. $(\forall x_0 P_5(x_0) \to P_2(x_3))$

Antwoord: De verzameling $ATOM \cap FORM$ is de doorsnede van atomen en formules, dus dat zijn gewoon de atomen, want alle atomen zijn formules. De verzameling $LIT - (ATOM \cap FORM)$ is dus de verzameling literalen minus de verzameling atomen, dus dat zijn alle formules van de vorm $\neg A$, waar A een atoom is. Het is duidelijk dat alleen de formule $\neg(x_3 = f_2(x_1))$ tot deze verzameling behoort.

13. Stel dat we volgens de boommethode een boom maken om de geldigheid van een redenering in een zekere eerste-ordetaal te onderzoeken. Stel verder dat we in een zekere tak van die boom (onder andere) de volgende formules hebben opgeschreven (waarbij ik voor de duidelijkheid de verantwoording heb weggelaten).

$$\begin{array}{ll} i. & \forall y(\forall x P(x) \rightarrow R(b,y)) \\ j. & P(a) \rightarrow \exists y Q(y) \\ k. & P(a) \\ l. & \exists x \forall y R(x,y) \end{array}$$

Op welke van de volgende manieren mag deze tak worden vervolgd?

A.	$m.$	$\exists y Q(y)$	$\rightarrow$-regel, j, k
B.	$m.$	$\forall y R(b,y)$	$\exists$-regel, l
C.	$m.$	$P(a) \rightarrow Q(e)$	$\exists$-regel, j
D.	$m.$	$\forall x P(x) \rightarrow R(b,a)$	$\forall$-**regel,** i

Antwoord:

A. Dit mag niet, want de $\rightarrow$-regel van de boommethode zegt dat je een implicatie $A \rightarrow B$ mag herschrijven naar $\neg A \vee B$.

B. Dit mag niet, want bij toepassen van de $\exists$-regel moet je een *nieuwe* naam gebruiken, en b komt al voor in formule i.

C. Dit mag niet, want hier wordt de $\exists$-regel toegepast op een echte subformule van formule j.

D. Dit mag wel.

14. Zij gegeven eerste-ordetaal K met 1-plaatsige predicaatsymbolen P en Q en 2-plaatsig predicaatsymbool R. Zij ook gegeven de structuur $\mathcal{T} = \langle D; R_0, R_1, R_2 \rangle$, waar $D = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$, $R_0 = P^{\mathcal{T}} = \{d_0, d_1\}$, $R_1 = Q^{\mathcal{T}} = \{d_1, d_2\}$ en $R_2 = R^{\mathcal{T}} = \{(d_3, d_0), (d_0, d_1), (d_1, d_0), (d_1, d_2), (d_2, d_1), (d_2, d_0)\}$. Welke van de volgende formules is waar in $\mathcal{T}$?

(Hint: maak eerst een plaatje van de structuur.)

A. $\forall x((\neg P(x) \rightarrow Q(x)) \vee R(x,x))$.

B. $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y((\neg P(y) \wedge Q(y)) \rightarrow R(y,x)))$**.**

C. $\forall x((P(x) \wedge \neg Q(x)) \rightarrow \forall y R(y,x))$.

D. $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y,z))) \rightarrow R(x,z))$.

Antwoord:

A. Als we $(\neg P(x) \rightarrow Q(x))$ herschrijven naar $(P(x) \vee Q(x))$ zien we dat deze formule zegt dat alle x eigenschap P of eigenschap Q hebben, of een relatie met zichzelf. Dat is niet het geval, want d_3 heeft eigenschap P noch Q, en ook geen relatie met zichzelf.

B. Hier staat dat voor alle elementen met eigenschap P geldt dat alle elementen met eigenschap Q maar niet P een relatie hebben met die elementen met eigenschap P. Dat is waar in deze structuur, want er is maar één element van de verzameling $Q^{\mathcal{T}} - P^{\mathcal{T}}$, namelijk d_2, en zowel (d_2, d_0) als (d_2, d_1) zitten in $R^{\mathcal{T}}$.

C. Deze formule is niet waar: voor alle elementen met eigenschap P en niet Q (dat is object d_0) geldt niet dat alle objecten er een relatie mee hebben, want d_0 zit niet met zichzelf in relatie R_2.

D. Deze formule drukt uit dat de relatie R transitief is: als de relatie geldt tussen x en y, en tussen y en z, dan geldt hij ook tussen x en z. Dat is in deze structuur niet waar, want er geldt bijvoorbeeld wel dat $(d_0, d_1) \in R^{\mathcal{T}}$ en dat $(d_1, d_2) \in R^{\mathcal{T}}$, maar niet dat $(d_0, d_2) \in R^{\mathcal{T}}$.

15. Beschouw de volgende redenering in de eerste-ordetaal T, die tweeplaatsig functiesymbool f bevat.

Redenering. $\therefore \forall x \forall y (f(x,y) = f(y,x))$.

Beschouw nu de structuur $\mathcal{A} = \langle D; g_0 \rangle$ voor deze taal T met domein $D = \{0,1,2\}$, waar $g_0 = f^{\mathcal{A}}$. Niet alle structuren die we verkrijgen door g_0 in te vullen vormen een tegenvoorbeeld voor de redenering. In welke van de volgende situaties toont structuur $\mathcal{A}$ wèl aan dat de gegeven redenering niet geldig is?

A. Als $g_0 = \{(2,1,2),(1,1,0),(1,2,2),(0,1,1),(0,0,1),(0,2,2),(2,2,0),(2,0,2),(1,0,0)\}$
B. Als $g_0 = \{(1,0,2),(0,1,2),(0,2,2),(1,1,1),(2,0,2),(1,2,0),(2,2,2),(2,1,0),(0,0,1)\}$
C. Als $g_0 = \{(0,2,0),(1,1,2),(0,1,1),(0,0,2),(1,2,1),(1,0,1),(2,0,0),(2,2,1),(2,1,1)\}$
D. Als $g_0 = \{(0,1,0),(2,2,2),(1,1,1),(2,0,1),(1,0,0),(1,2,2),(0,0,1),(2,1,2),(0,2,1)\}$

Antwoord: De structuur toont de ongeldigheid van de redenering aan, wanneer hij twee waarden a en b bevat, waarvoor geldt dat $f(a,b) \neq f(b,a)$. Dat is alleen het geval bij de eerste specificatie van g_0, omdat daar geldt $(0,1,1) \in g_0$ en $(1,0,0) \in g_0$.

Open vragen

1. **Fitch**

Geef in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende afleiding.

Stelling. $\neg(q \to \neg(p \lor q)) \vdash q$.

Je mag regels van de boommethode of de resolutieregel hier dus niet gebruiken, maar alléén de afleidingsregels van het *niet-uitgebreide* systeem van Fitch.

Antwoord: Deze afleiding is niet moeilijk. Het enige wat hier 'lastig' aan is, is dat er een disjunctie staat die helemaal niet gebruikt wordt.

1	$\mid\ \neg(q \to \neg(p \lor q))$	hypothese 1
2	$\mid\ \mid\ \neg q$	hypothese 2
3	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	hypothese 3
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ p \lor q$	hypothese 4
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ q$	rei, 3
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg q$	rei, 2
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(p \lor q)$	$\neg$-intro, 4, 5, 6
8	$\mid\ \mid\ q \to \neg(p \lor q)$	$\to$-intro, 3, 7
9	$\mid\ \mid\ \neg(q \to \neg(p \lor q))$	rei, 1
10	$\mid\ \neg\neg q$	$\neg$-intro, 2, 8, 9
11	$\mid\ q$	$\neg$-elim, 10

2. **Boommethode**

De volgende redenering in een zekere (toepasselijk gedefinieerde) eerste-ordetaal L is niet geldig.

Redenering. $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg\exists z(R(x,z) \wedge P(z))) \mathrel{\therefore} P(a) \vee P(b)$.

Beantwoord onderstaande vragen, en geef (met letters in de kantlijn) duidelijk aan welk deel van je antwoord bij welke deelvraag hoort.

(a) Hoe kun je, in het algemeen, aan een boom zien of een redenering wel of niet geldig is?

> **Antwoord:** Als tenminste één tak van een boom voor een bepaalde redenering niet sluit, dan is de redenering niet geldig.

(b) Maak een boom voor de redenering hierboven.

Antwoord:

1.	✓	$\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$	premisse
2.	$*$	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg\exists z(R(x,z) \wedge P(z)))$	premisse
3.	✓	$\neg(P(a) \vee P(b))$	$\neg$-conclusie
4.	✓	$\neg P(a) \wedge \neg P(b)$	$\vee$-regel, 3
5.		$\neg P(a)$	$\wedge$-regel, 4
6.		$\neg P(b)$	$\wedge$-regel, 4
7.	✓	$P(c) \wedge \exists y R(c,y)$	$\exists$-regel, 1
			(**nieuwe naam**, niet a of b!!!)
8.		$P(c)$	$\wedge$-regel, 7
9.	✓	$\exists y R(c,y)$	$\wedge$-regel, 7
10.		$R(c,d)$	$\exists$-regel, 9
			(**nieuwe naam**, niet a, b of c!!!)
11.	✓	$P(c) \rightarrow \neg\exists z(R(c,z) \wedge P(z))$	$\forall$-regel, 2
12.	✓	$\neg P(c) \vee \neg\exists z(R(c,z) \wedge P(z))$	$\rightarrow$-regel, 11

Linkertak:

13. $\neg P(c)$ $\vee$-regel, 12

Sluit (8, 13)

Rechtertak:

14.	✓	$\neg\exists z(R(c,z) \wedge P(z))$	$\vee$-regel, 12
15.	$*$	$\forall z \neg(R(c,z) \wedge P(z))$	$\exists$-regel, 14
16.	✓	$\neg(R(c,d) \wedge P(d))$	$\forall$-regel, 15
17.	✓	$\neg R(c,d) \vee \neg P(d)$	$\wedge$-regel, 16

18. $\neg R(c,d)$ $\vee$-regel, 17

Sluit (10, 18)

19. $\neg P(d)$ $\vee$-regel, 17

Sluit niet!

(c) Leg duidelijk uit hoe je, in het algemeen, uit een boom voor een ongeldige redenering een tegenvoorbeeld kunt bepalen.

> **Antwoord:** Een boom voor een ongeldige redenering heeft tenminste één tak die open blijft. Neem zo'n tak, en beschouw alle formules in die tak die niet herschreven zijn naar equivalente formules, plus alle formules die universeel gekwantificeerd zijn. Maak nu een structuur waarin al die formules waar zijn, en die structuur is een tegenvoorbeeld.

(d) Geef een tegenvoorbeeld dat de ongeldigheid van de redenering hierboven aantoont. (Je mag dit in de vorm van een plaatje doen, of als formeel gedefinieerde wiskundige structuur.)

Antwoord: De boom heeft maar één tak die open blijft. We beschouwen dus alle formules in die tak, die niet herschreven zijn naar een equivalente formule, en alle universeel gekwantificeerde formules in die tak:

2. $\forall x(P(x) \to \neg\exists z(R(x,z) \wedge P(z)))$
5. $\neg P(a)$
6. $\neg P(b)$
8. $P(c)$
10. $R(c,d)$
15. $\forall z\neg(R(c,z) \wedge P(z))$
19. $\neg P(d)$

In een plaatje maak je een rechthoek om het domein van de structuur aan te duiden, met daarbinnen een cirkel (deelverzameling van het domein) om alle elementen in te stoppen die eigenschap P hebben. Dat plaats je—om formules 5, 6 en 19 waar te maken—drie elementen (voor de objecten met namen a, b en d) *buiten* de cirkel, en—om formule 8 waar te maken—één element *binnen* de cirkel (voor het object met de naam c). Tenslotte teken je een pijl van het element dat staat voor c naar het element dat staat voor d (om formule 10 waar te maken). Je moet dan nog checken of de beide universeel gekwantificeerde formules (2 en 15) waar zijn, en dat blijkt zo te zijn (zie hieronder).
Formeel gedefinieerd, gaat het om de structuur $\mathcal{A} = \langle D; R_0, R_1; d_0, d_1, d_2, d_3\rangle$, waar

$$\begin{aligned} D &= \{d_0, d_1, d_2, d_3\} \\ R_0 = P^{\mathcal{A}} &= \{d_2\} \\ R_1 = R^{\mathcal{A}} &= \{(d_2, d_3)\} \end{aligned}$$

De denotaties zijn verder $a^{\mathcal{A}} = d_0$, $b^{\mathcal{A}} = d_1$, $c^{\mathcal{A}} = d_2$, en $d^{\mathcal{A}} = d_3$.
Formule 2 is waar in structuur $\mathcal{A}$ omdat voor alle elementen van $P^{\mathcal{A}}$ (d_2 dus) er in D geen object bestaat waar het mee in $R^{\mathcal{A}}$ zit, en dat in $P^{\mathcal{A}}$ zit. Formules 5 en 6 zijn waar omdat $a^{\mathcal{A}} \notin P^{\mathcal{A}}$ en $b^{\mathcal{A}} \notin P^{\mathcal{A}}$. Formule 8 is waar omdat $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. Formule 10 is waar omdat $(c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}) \in R^{\mathcal{A}}$. Formule 15 is waar omdat voor alle elementen van D geldt dat ze niet zowel in $P^{\mathcal{A}}$ zitten als met $c^{\mathcal{A}}$ in $R^{\mathcal{A}}$ zitten. Alleen $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$, maar er geldt niet $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}) \in R^{\mathcal{A}}$. Formule 19, tenslotte, is waar omdat $d^{\mathcal{A}} \notin P^{\mathcal{A}}$.

(e) Leg duidelijk uit hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid van de redenering hierboven aantoont.

Antwoord: De redenering claimt dat de conclusie waar is in alle situaties waarin alle premissen waar zijn. De structuur is een tegenvoorbeeld, omdat die laat zien dat dit niet waar is: In de structuur zijn namelijk de premissen waar, maar is de conclusie onwaar.
De eerste premisse is waar in de structuur $\mathcal{A}$ omdat er in het domein van de structuur een object bestaat (namelijk d_2) waarvoor geldt dat het in $P^{\mathcal{A}}$ zit, en waarvoor een object bestaat (namelijk d_3) waarmee het in relatie $R^{\mathcal{A}}$ zit. **De tweede premisse is waar** omdat voor alle objecten in het domein geldt dat als ze in $P^{\mathcal{A}}$ zitten (dit is alleen waar voor d_2), er geen object bestaat waar het mee in relatie $R^{\mathcal{A}}$ zit en dat in $P^{\mathcal{A}}$ zit. Object d_2 zit namelijk in $P^{\mathcal{A}}$, en er bestaat weliswaar een object waarmee d_2 in relatie $R^{\mathcal{A}}$ zit, maar dat object (d_3) zit niet in $P^{\mathcal{A}}$.
De conclusie is onwaar, omdat $a^{\mathcal{A}}$ noch $b^{\mathcal{A}}$ in $P^{\mathcal{A}}$ zit.

3. **Meta-theorie**

Bepaal of de volgende redenering geldig is of niet. Als je denkt dat hij geldig is, geef dan een bewijs dat dit aantoont. Als je denkt dat de redenering niet geldig is, geef dan een tegenvoorbeeld (in de vorm van concrete formules voor A, B en C) dat dit aantoont, en leg uit hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid van de redenering aantoont.

Redenering. *Voor alle formules A, B en $C \in PROP$ geldt: Als* $B \models A \to C$ *dan* $A \models B \to C$.

Antwoord: De redenering is geldig. De redenering zegt dat als de waarheid van B tot gevolg heeft dat als A waar is, ook C waar is, het ook zo is dat de waarheid van A tot gevolg heeft dat als B waar is, ook C waar is. (Ook de converse is waar trouwens.) Beide expressies zeggen namelijk dat C volgt, als zowel A als B waar zijn.

Bewijs. We nemen willekeurige formules A, B en C uit $PROP$, en zullen aantonen dat voor deze formules de gegeven implicatie waar is. Neem dus aan, dat (formules A, B en C dusdanig zijn dat) $B \models A \to C$ waar is, dus dat alle valuaties die model zijn voor B, ook model zijn voor $A \to C$. Nu moeten we aantonen dat $A \models B \to C$, dus dat alle valuaties die model zijn voor A, ook model zijn voor $B \to C$. Neem een willekeurige valuatie die model is voor A, zeg w, dus $w(A) = 1$. Te bewijzen is dat $w(B \to C) = 1$. We onderscheiden nu twee mogelijkheden: $w(B) = 0$ of $w(B) = 1$.

$w(B) = 0$: Nu is $w(B \to C) = \max(1 - w(B), w(C)) = \max(1 - 0, w(C)) = \max(1, w(C)) = 1$, ongedacht de waarde van $w(C)$.

$w(B) = 1$: Omdat $w(B) = 1$, weten we vanwege de aanname dat $B \models A \to C$, dat $w(A \to C) = 1 = \max(1-w(A), w(C))$. Omdat $w(A) = 1$, is $\max(1-w(A), w(C)) = \max(1-1, w(C)) = \max(0, w(C))$, en omdat dat gelijk moet zijn aan 1, moet gelden dat $w(C) = 1$. Dan is dus $w(B \to C) = \max(1 - w(B), w(C)) = \max(1 - 1, 1) = \max(0, 1) = 1$.

In beide gevallen, dus in het algemeen, is dus $w(B \to C) = 1$. Omdat w een willekeurig model van A was, geldt voor alle valuaties die A waar maken dat ze $B \to C$ waar maken, dus dat $A \models B \to C$. Omdat, tenslotte, formules A, B en C willekeurig waren, geldt de implicatie voor *alle* formules in $PROP$. QED

Einde tentamenopgaven