

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

7 november 2012, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT! (ECHT DOEN, IK MEEN HET!)

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen en 3 open vragen. Beide onderdelen zijn in totaal goed voor **4,5 punten**. (Je cijfer is minimaal een 1.) Gebruik dit gegeven om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
 - Alle meerkeuzevragen wegen even zwaar.
 - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord. (NB: Ik zal een vorm van **gokcorrectie** toepassen.)
 - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf, als je zeker van je antwoorden bent, de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
 - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
 - Vul op het meerkeuzeformulier **zowel met cijfers als met blokjes** je studienummer in.
 - Zet je **handtekening** op je MAF. *Doe dat nu maar gelijk, dan heb je dat in ieder geval gedaan.*
- Wat betreft de **open vragen**:
 - Alle open vragen wegen even zwaar.
 - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
 - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven.
 - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
 - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets over aan mijn interpretatie.
 - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 3.

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de formule $F = (p_3 \rightarrow (\neg p_1 \vee \neg(p_3 \wedge \neg p_7)))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

- A. $v(F) = \max(1 - v(p_3), \max(1 - v(p_1), 1 - \min(v(p_3), 1 - v(p_7))))$
- B. $v(F) = \max(v(p_3), 1 - \max(1 - v(p_1), 1 - \min(v(p_3), 1 - v(p_7))))$
- C. $v(F) = \max(1 - v(p_3), \max(1 - v(p_1), \min(1 - v(p_3), 1 - v(p_7))))$
- D. $v(F) = \max(v(p_3), 1 - \min(1 - v(p_1), \max(1 - v(p_3), 1 - v(p_7))))$

2. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} f(p_i) &= 0 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\ f(\neg A) &= f(A) + 1 && \text{voor } A \in PROP \\ f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

Welke waarde kent de functie f die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in $PROP$?

- A. De lengte van de formule.
 - B. Het aantal subformules van de formule.
 - C. De aantal voorkomens van connectieven in de formule.
 - D. Het aantal voorkomens van haakjes in de formule.
3. Welke van de volgende situaties kan zich voordoen?
- A. $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ is waar, $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$ is niet waar.
 - B. $(\neg p \rightarrow \neg q)$ is waar, $\neg(p \rightarrow \neg q)$ is niet waar.
 - C. $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$ is waar, $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ is niet waar.
 - D. $\neg(p \rightarrow \neg q)$ is waar, $(\neg p \rightarrow \neg q)$ is niet waar.
4. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als $\models A \vee B$ en $\sim \models A$, dan $\models B$.

De redenering is niet geldig. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

- A. $A = p, B = \neg q$
 - B. $A = p, B = \neg p$
 - C. $A = p, B = p \vee \neg p$
 - D. $A = p \vee \neg p, B = p$
5. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar is, wat weten we dan zeker?
- A. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C een contradictie.
 - B. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C een contingentie.
 - C. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C een tautologie.
 - D. Geen van bovenstaande uitspraken is waar.
6. Stel dat A, B en C formules uit $PROP$ zijn waarvoor geldt dat $A \models B$ en $A \models C$. Laat M_A, M_B en M_C de verzamelingen modellen van formules A, B respectievelijk C zijn. (Een model van een formule is een valuatie die de formule waar maakt.) Welke van onderstaande uitspraken is **niet** waar?
- A. $M_A \subseteq M_B \cap M_C$
 - B. $M_A \subseteq M_B \cup M_C$
 - C. Als $M_C = \emptyset$, dan $M_B = \emptyset$
 - D. Als $M_B = \emptyset$, dan $M_A = \emptyset$

7. Stel dat A en B formules in $PROP$ zijn waarvoor geldt $A \models \neg A$ en $\neg B \models B$. Wat is waar?
- $\models \neg A$ en $\models B$.
 - $\models \neg A$ en $\not\models B$.
 - $\not\models \neg A$ en $\models B$.
 - $\not\models \neg A$ en $\not\models B$.
8. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als we op deze redenering de boommethode toepassen, en alle takken van de boom open blijven, wat is dan waar?
- De verzameling Γ kan onvervulbaar zijn.
 - De formule C kan een tautologie zijn.
 - De formule $\neg C$ heeft geen model.
 - De verzameling Γ kan leeg zijn.
9. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. We herschrijven de formules in $\Gamma \cup \{C\}$ naar CNV, wat een verzameling F met daarin disjuncties van literalen oplevert. Nu passen we de resolutiemethode toe op F en slagen erin de lege disjunctie $\square$ af te leiden. Welke uitspraak is waar?
- Als C een tautologie is, bevat Γ niet uitsluitend tautologieën.
 - Als C een contradictie is, bevat Γ een contingentie.
 - Als C een contradictie is, bevat Γ niet uitsluitend tautologieën.
 - Als C een contingentie is, bevat Γ geen contingenties.

10. Beschouw de volgende redenering, die niet geldig is.

Redenering. Voor alle verzamelingen A en B geldt: Als $A \not\subseteq B$, dan $A \subseteq B^c$.

Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld? (Ga er steeds vanuit dat het universum $U = A \cup B$.)

- $A = \{0\}$ en $B = \{0, 1\}$
 - $A = \{0, 1\}$ en $B = \{0\}$
 - $A = \emptyset$ en $B = \{0\}$
 - $A = \{0\}$ en $B = \emptyset$
11. Beschouw de volgende redenering, waar 2^X de machtsverzameling van X aanduidt.

Redenering. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$.

Deze redenering is niet geldig. Onder welke conditie kan een tegenvoorbeeld worden gevonden?

- $A = B$
 - $A \neq B$
 - $A \subseteq B$
 - $B \subseteq A$
12. Laat L een eerste-ordetaal zijn met in het niet-logisch alfabet het éénplaatsige predicaatsymbool P , het tweeplaatsige predicaatsymbool T en de tweeplaatsige functie f . Welke uitspraak is **niet** waar?
- $\neg T(c_{18}, f(x_3, c_{18})) \in ATOM$
 - $f(c_7, f(x_8, c_5)) \in TERM - VAR$
 - $\neg(f(c_9, x_1) = f(c_0, c_1)) \in FORM - ZIN$
 - $P(f(c_1, x_1)) \in LIT$

13. Beschouw de eerste-ordetaal T met in het niet-logisch alfabet het éénplaatsige predicaatsymbool P en het tweepplaatsige predicaatsymbool G , met als betekenis van $P(x)$ dat “ x is een priemgetal,” en van $G(x, y)$ dat “ x is groter dan y .” Stel dat we de propositie “er bestaat geen grootste priemgetal” willen uitdrukken in de taal T . Welke van de volgende formules doet dat *niet*?
- $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow (P(y) \wedge G(y, x)))$
 - $\forall x (\neg P(x) \vee \neg \forall y \neg (P(y) \wedge G(y, x)))$
 - $\forall x (P(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge G(y, x)))$
 - $\neg \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \vee \neg G(y, x)))$
14. Een operatie is ‘commutatief’ als de volgorde van de argumenten niet uitmaakt. In de rekenkunde is *vermenigvuldigen* commutatief, want $a \cdot b = b \cdot a$, maar is *delen* niet commutatief, want $a/b \neq b/a$ (in het algemeen). Welke formule in een eerste-ordetaal met in het niet-logisch alfabet het tweepplaatsige functiesymbool f , drukt uit dat f *niet* commutatief is?
- $\forall x \forall y \neg (f(x, y) = f(y, x))$
 - $\forall x \exists y \neg (f(x, y) = f(y, x))$
 - $\exists x \forall y \neg (f(x, y) = f(y, x))$
 - $\exists x \exists y \neg (f(x, y) = f(y, x))$
15. Beschouw de eerste-ordetaal M met in het niet-logisch alfabet het éénplaatsige predicaatsymbool P . De formule $\exists x P(x)$ is waar in elke structuur $\mathcal{A}$ voor deze taal waarin de verzameling $P^{\mathcal{A}}$ niet leeg is, dus *tenminste* één element heeft. Soms willen we niet alleen zeggen dat er *tenminste één* object met eigenschap P bestaat, maar dat er *precies één* object met eigenschap P bestaat. (Dit wordt geschreven als $\exists! x P(x)$.) Welke van de onderstaande formules in de taal M drukt dit uit?
- $\exists x \forall y (P(x) \wedge (P(y) \rightarrow \neg(x = y)))$
 - $\exists x \exists y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (x = y))$
 - $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow (x = y)))$
 - $\exists x (P(x) \wedge \exists y (P(y) \rightarrow \neg(x = y)))$

Open vragen

1. Bewijs met volledige inductie de volgende stelling.

Stelling. Voor alle natuurlijke getallen $n \geq 0$ geldt

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

2. Geef in het **niet-uitgebreide** systeem van Fitch de volgende afleiding.

Stelling. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash \neg p \rightarrow \neg q$

3. Laat eerste-ordetaal L met in het niet-logisch alfabet het éénplaatsige functiesymbool f gegeven zijn. Beschouw de volgende redenering, uitgedrukt in L .

Redenering. $\therefore \forall x \forall y ((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$

- Maak een boom voor de redenering hierboven.
- (Deze twee deelvragen gaan over je antwoord.)
 - Schrijf je conclusie op (“De redenering is geldig/niet geldig.”).
 - Maak duidelijk hoe deze conclusie volgt uit je boom, en betrek in je uitleg ook de verzameling met daarin (de premissen en) de negatie van de conclusie.
- (Beantwoord onderstaande vragen alleen als je denkt dat de redenering **niet geldig** is.)
 - Leg uit hoe je een tegenvoorbeeld uit de boom kunt afleiden.
 - Geef een tegenvoorbeeld in de vorm van zowel een plaatje als een formeel gedefinieerde structuur.
 - Beschrijf hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid van de redenering aantoont.