

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

7 november 2012, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT! (ECHT DOEN, IK MEEN HET!)

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen en 3 open vragen. Beide onderdelen zijn in totaal goed voor **4,5 punten**. (Je cijfer is minimaal een 1.) Gebruik dit gegeven om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
 - Alle meerkeuzevragen wegen even zwaar.
 - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord. (NB: Ik zal een vorm van **gokcorrectie** toepassen.)
 - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf, als je zeker van je antwoorden bent, de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
 - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
 - Vul op het meerkeuzeformulier **zowel met cijfers als met blokjes** je studienummer in.
 - Zet je **handtekening** op je MAF. *Doe dat nu maar gelijk, dan heb je dat in ieder geval gedaan.*
- Wat betreft de **open vragen**:
 - Alle open vragen wegen even zwaar.
 - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
 - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven.
 - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
 - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets over aan mijn interpretatie.
 - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 10.

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de formule $F = (p_3 \rightarrow (\neg p_1 \vee \neg(p_3 \wedge \neg p_7)))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

- A. $v(F) = \max(1 - v(p_3), \max(1 - v(p_1), 1 - \min(v(p_3), 1 - v(p_7))))$
- B. $v(F) = \max(v(p_3), 1 - \max(1 - v(p_1), 1 - \min(v(p_3), 1 - v(p_7))))$
- C. $v(F) = \max(1 - v(p_3), \max(1 - v(p_1), \min(1 - v(p_3), 1 - v(p_7))))$
- D. $v(F) = \max(v(p_3), 1 - \min(1 - v(p_1), \max(1 - v(p_3), 1 - v(p_7))))$

Antwoord:

$$\begin{aligned}
 v((p_3 \rightarrow (\neg p_1 \vee \neg(p_3 \wedge \neg p_7)))) &= \max(1 - v(p_3), v((\neg p_1 \vee \neg(p_3 \wedge \neg p_7)))) \\
 &= \max(1 - v(p_3), \max(v(\neg p_1), v(\neg(p_3 \wedge \neg p_7)))) \\
 &= \max(1 - v(p_3), \max(v(\neg p_1), 1 - v((p_3 \wedge \neg p_7)))) \\
 &= \max(1 - v(p_3), \max(v(\neg p_1), 1 - \min(v(p_3), v(\neg p_7)))) \\
 &= \max(1 - v(p_3), \max(1 - v(p_1), 1 - \min(v(p_3), 1 - v(p_7))))
 \end{aligned}$$

Antwoord A is dus correct.

2. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned}
 f(p_i) &= 0 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\
 f(\neg A) &= f(A) + 1 && \text{voor } A \in PROP \\
 f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}
 \end{aligned}$$

Welke waarde kent de functie f die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in $PROP$?

- A. De lengte van de formule.
- B. Het aantal subformules van de formule.
- C. De aantal voorkomens van connectieven in de formule.**
- D. Het aantal voorkomens van haakjes in de formule.

Antwoord: (Ik geef hieronder bij elk fout antwoord maar één reden waarom het antwoord fout is. Er kunnen nog andere redenen zijn.)

- A. Als $f(F)$ de lengte van F was, zou $f(p_i) = 1$ moeten zijn geweest.
- B. Als $f(F)$ het aantal subformules van F was, zou $f(p_i) = 1$ moeten zijn geweest.
- C. Dit is het juiste antwoord: Het aantal connectieven in een formule $F = \neg A$ is één plus het aantal connectieven in de formule A , en het aantal connectieven in een formule $F = (A \star B)$ is één plus het aantal connectieven in de formules A en B .
- D. De waarde $f(F)$ is niet het aantal haakjes in F , want dan zou $f(\neg A) = f(A)$ moeten zijn geweest: In een formule van de vorm $\neg A$ komen evenveel haakjes voor als in de formule A .

3. Welke van de volgende situaties kan zich voordoen?

- A. $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ is waar, $\neg(p \leftrightarrow \neg q)$ is niet waar.
- B. $(\neg p \rightarrow \neg q)$ is waar, $\neg(p \rightarrow \neg q)$ is niet waar.**
- C. $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ is waar, $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ is niet waar.
- D. $(\neg p \rightarrow \neg q)$ is waar, $(\neg p \rightarrow \neg q)$ is niet waar.

Antwoord: Dit is met een waarheidstafel eenvoudig te bepalen.

p	q	$(\neg p \rightarrow \neg q)$	$\neg (p \rightarrow \neg q)$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q)$	$\neg (p \leftrightarrow \neg q)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0

Het goede antwoord is dus dat er valuaties bestaan die $(\neg p \rightarrow \neg q)$ waar maken, terwijl ze $\neg(p \rightarrow \neg q)$ onwaar maken (antwoord B). Het zijn namelijk alle valuaties waarvoor $v(q) = 0$: Voor die valuaties geldt dat $\neg q$ waar is, dus dat $\neg p \rightarrow \neg q$ waar is, terwijl $p \rightarrow \neg q$ waar is, dus $\neg(p \rightarrow \neg q)$ onwaar is. Verder geldt dat $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \equiv \neg(p \leftrightarrow \neg q)$, dus het is niet mogelijk dat één van beide waar is, terwijl de ander onwaar is.

Tenslotte betekent het feit dat het niet mogelijk is dat $\neg(p \rightarrow \neg q)$ waar is, terwijl $(\neg p \rightarrow \neg q)$ onwaar is, dat die laatste formule uit de eerste volgt, en er dus ook uit af te leiden is (in het systeem voor natuurlijke deductie van Fitch, bijvoorbeeld). Dat moet je in open vraag 2 van dit tentamen doen.

4. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als $\models A \vee B$ en $\sim \models A$, dan $\models B$.

De redenering is niet geldig. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

- A. $A = p, B = \neg q$
- B. $A = p, B = \neg p$
- C. $A = p, B = p \vee \neg p$
- D. $A = p \vee \neg p, B = p$

Antwoord: Een tegenvoorbeeld is een paar formules A en B waarvoor geldt dat het antecedent van de implicatie in de redenering wèl waar is, maar het consequent niet. Zulke formules tonen aan dat niet voor alle formules geldt dat als het antecedent waar is, ook het consequent waar is. Er moet voor de formules in het tegenvoorbeeld dus gelden dat $\models A \vee B$ waar is, en $\sim \models A$ ook, en dat $\models B$ onwaar is. Dus $A \vee B$ moet een tautologie zijn, A mag geen tautologie zijn, en B ook niet.

- A. Als $A = p$ en $B = \neg q$ is $A \vee B$ géén tautologie, dus deze formules vormen geen tegenvoorbeeld.
- B. Als $A = p$ en $B = \neg p$ is $A \vee B$ een tautologie, en zijn A noch B tautologieën: deze formules voldoen aan de voorwaarden, en vormen dus een tegenvoorbeeld.
- C. Als $A = p$ en $B = p \vee \neg p$ is B wèl een tautologie, dus deze formules vormen geen tegenvoorbeeld.
- D. Als $A = p \vee \neg p$ en $B = p$ is A wèl een tautologie, dus deze formules vormen geen tegenvoorbeeld.

5. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar is, wat weten we dan zeker?

- A. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C een contradictie.
- B. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C een contingentie.
- C. Als $\Gamma \neq \emptyset$, dan is C een tautologie.
- D. Geen van bovenstaande uitspraken is waar.

Antwoord: De verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ is vervulbaar, dus de redenering is niet geldig. Dat betekent dat er een valuatie bestaat die model is voor alle formules in Γ , en niet voor C . Bovendien is gegeven dat Γ niet leeg is, en dus tenminste één formule bevat. De vraag is of we op grond hiervan iets over C kunnen concluderen: moet het zo zijn dat C een contradictie is, of een contingentie, of een tautologie? Of kan onder deze omstandigheden C elk van die vormen *niet* hebben?

- A. Een redenering met ≥ 1 premissen kan ongeldig zijn terwijl de conclusie geen contradictie is: Er hoeft maar één valuatie te zijn die de conclusie onwaar maakt, maar niet alle valuaties hoeven de conclusie onwaar te maken.
- B. De conclusie hoeft geen contingentie te zijn, want ook als de conclusie een contradictie is bestaat er een valuatie die (de premissen waar en) de conclusie onwaar maakt.
- C. We weten zeker dat de conclusie géén tautologie is, want dan was de verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ niet vervulbaar geweest.
- D. Dit is dus het correcte antwoord.

6. Stel dat A , B en C formules uit $PROP$ zijn waarvoor geldt dat $A \models B$ en $A \models C$. Laat M_A , M_B en M_C de verzamelingen modellen van formules A , B respectievelijk C zijn. (Een model van een formule is een valuatie die de formule waar maakt.) Welke van onderstaande uitspraken is **niet** waar?

- A. $M_A \subseteq M_B \cap M_C$
- B. $M_A \subseteq M_B \cup M_C$
- C. Als $M_C = \emptyset$, dan $M_B = \emptyset$**
- D. Als $M_B = \emptyset$, dan $M_A = \emptyset$

Antwoord:

- A. Omdat $A \models B$ weten we dat $M_A \subseteq M_B$, en omdat $A \models C$ weten we dat $M_A \subseteq M_C$. Voor elk element v van M_A geldt dus $v \in M_B \wedge v \in M_C$, dus $v \in M_B \cap M_C$. Dus is $M_A \subseteq M_B \cap M_C$ waar.
- B. Omdat we bij antwoord A al hebben vastgesteld dat $M_A \subseteq M_B \cap M_C$, is ook $M_A \subseteq M_B \cup M_C$ waar, want voor alle verzamelingen A en B geldt $A \cap B \subseteq A \cup B$. (Bewijs dit eens!)
- C. Als $M_C = \emptyset$, is C een contradictie. Maar omdat $A \models C$ waar is, moet ook A een contradictie zijn: Als er namelijk een valuatie zou bestaan die A waar maakt (terwijl hij C onwaar maakt, aangezien C een contradictie is), zou die valuatie een tegenmodel voor $A \models C$ zijn. Een valuatie die A waar maakt kan dus niet bestaan (als $A \models C$ en $M_C = \emptyset$). Maar het feit dat A een contradictie is, betekent niet dat B ook een contradictie moet zijn: Er kan best een valuatie bestaan die A onwaar maakt, en B waar, terwijl $A \models B$ geldt. (Sowieso kan een valuatie die A niet waar maakt geen tegenmodel voor $A \models B$ zijn.) Deze uitspraak is dus niet waar: Dit is het correcte antwoord op de vraag.

Om compleet te zijn: Een tegenvoorbeeld wordt bijvoorbeeld gevormd door de formules $A = C = p \wedge \neg p$, en $B = p$. Voor deze formules geldt dat $A \models C$, want er bestaat geen valuatie die A waar maakt (en C onwaar), en dat $A \models B$, want er bestaat geen valuatie die A waar maakt (en B onwaar). Deze formules voldoen dus aan de voorwaarden die in de vraag worden gesteld. Verder is voor deze formules het antecedent van "Als $M_C = \emptyset$, dan $M_B = \emptyset$ " waar (want C is een contradictie), maar het consequent niet, want er zijn valuaties die B waar maken (namelijk alle valuaties met $v(p) = 1$).
- D. Als $M_B = \emptyset$, is B een contradictie. Maar omdat $A \models B$ waar is, moet ook A een contradictie zijn: Een valuatie die A waar maakt, zou (als B een contradictie is) een tegenmodel voor $A \models B$ zijn, en kan dus niet bestaan.

7. Stel dat A en B formules in $PROP$ zijn waarvoor geldt $A \models \neg A$ en $\neg B \models B$. Wat is waar?

- A. $\models \neg A$ en $\models B$.
- B. $\models \neg A$ en $\not\models B$.
- C. $\not\models \neg A$ en $\models B$.
- D. $\not\models \neg A$ en $\not\models B$.

Antwoord: Als er een model voor A (een valuatie die A waar maakt) zou bestaan, zou die valuatie, omdat $A \models \neg A$, ook model voor $\neg A$ zijn, wat niet mogelijk is. De formule A heeft dus geen model en is dus een contradictie, zodat $\models \neg A$ waar is. Zo redenerend moet ook $\models B$ waar zijn: A is dus het correcte antwoord.

8. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als we op deze redenering de boommethode toepassen, en alle takken van de boom open blijven, wat is dan waar?

- A. De verzameling Γ kan onvervulbaar zijn.
- B. De formule C kan een tautologie zijn.
- C. De formule $\neg C$ heeft geen model.
- D. De verzameling Γ kan leeg zijn.

Antwoord: Omdat tenminste één tak van de boom open blijft, is de redenering niet geldig, en dus $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar: Er is een valuatie die alle formules in Γ (de premissen) waar maakt, en de conclusie onwaar.

- A. De verzameling Γ kan niet onvervulbaar zijn, want $\Gamma \cup \{\neg C\}$ is vervulbaar.
- B. Als C een tautologie is, is de redenering geldig (want dan kan een tegenvoorbeeld niet bestaan), en is $\Gamma \cup \{\neg C\}$ niet vervulbaar. Dus C kan geen tautologie zijn.
- C. De formule $\neg C$ heeft wel een model, want het tegenvoorbeeld (waarvan het bestaan door het niet sluiten van een tak gegarandeerd wordt) is dat.
- D. De verzameling Γ kan inderdaad leeg zijn: Alle valuaties vervullen de lege verzameling, dus als C een contradictie of een contingentie is, bestaat er tenminste één valuatie die Γ en $\neg C$ vervult.

9. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. We herschrijven de formules in $\Gamma \cup \{C\}$ naar CNV, wat een verzameling F met daarin disjuncties van literalen oplevert. Nu passen we de resolutiemethode toe op F en slagen erin de lege disjunctie $\square$ af te leiden. Welke uitspraak is waar?

- A. Als C een tautologie is, bevat Γ niet uitsluitend tautologieën.
- B. Als C een contradictie is, bevat Γ een contingentie.
- C. Als C een contradictie is, bevat Γ niet uitsluitend tautologieën.
- D. Als C een contingentie is, bevat Γ geen contingenties.

Antwoord: Het feit dat uit de verzameling $\Gamma \cup \{C\}$ de lege disjunctie kan worden afgeleid, betekent dat deze verzameling niet vervulbaar is. Er bestaat dus geen valuatie die alle premissen en de conclusie waar maakt. (Merk op dat dit niks zegt over de geldigheid van de redenering!) Voor elk van de volgende opties die niet het correcte antwoord zijn, vallen tegenvoorbeelden te verzinnen, maar dat heb ik hier niet steeds gedaan. Het is een goede oefening dat te doen.

- A. Als C een tautologie is, bevat Γ inderdaad niet uitsluitend tautologieën (dus dit is het correcte antwoord). Als dat wel zo zou zijn, zouden namelijk alle valuaties de verzameling $\Gamma \cup \{C\}$ vervullen, en die verzameling is niet vervulbaar.
- B. Als C een contradictie is, dan weten we al zeker dat geen enkele valuatie $\Gamma \cup \{C\}$ vervult, zodat dit verder niks afdwingt over de vorm van de formules in Γ . Het hoeft niet zo te zijn dat Γ

een contingentie bevat: Alle formules in Γ zouden tautologieën kunnen zijn, of contradicties, of combinaties daarvan: een model van $\Gamma \cup \{C\}$ bestaat sowieso niet, omdat C een contradictie is.

- C. Net als bij antwoord B, weten we niks over de formules in Γ als C een contradictie is. Op grond daarvan weten we namelijk al dat aan de voorwaarde, dat $\Gamma \cup \{C\}$ niet vervulbaar is, voldaan wordt. Het is dus best mogelijk dat Γ wèl uitsluitend tautologieën bevat, en $\Gamma \cup \{C\}$ toch niet vervulbaar is (omdat C een contradictie is).
- D. Als C een contingentie is, kan Γ best contingenties bevatten, zolang een valuatie die C vervult niet alle formules in Γ vervult; dan is namelijk die valuatie een model voor $\Gamma \cup \{C\}$, en zo'n valuatie bestaat niet.

10. Beschouw de volgende redenering, die niet geldig is.

Redenering. Voor alle verzamelingen A en B geldt: Als $A \not\subseteq B$, dan $A \subseteq B^c$.

Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld? (Ga er steeds vanuit dat het universum $U = A \cup B$.)

- A. $A = \{0\}$ en $B = \{0, 1\}$
B. $A = \{0, 1\}$ en $B = \{0\}$
 C. $A = \emptyset$ en $B = \{0\}$
 D. $A = \{0\}$ en $B = \emptyset$

Antwoord: Als we willen aantonen dat de redenering niet geldig is, moeten we verzamelingen A en B geven waarvoor het antecedent waar is, maar het consequent onwaar. Er moet dus gelden dat $A \not\subseteq B$, dus er moet een element in A zitten dat niet in B zit. Er moet ook gelden dat $A \not\subseteq B^c$, dus er moet een element in A zitten dat niet in B^c zit, dus in B . Samenvattend wordt een tegenvoorbeeld gevormd door alle verzamelingen A en B waarvoor geldt dat er een element in A zit dat *niet* in B zit, en dat er een element in A zit dat *wèl* in B zit.

- A. In deze situatie is er geen element van A dat niet in B zit.
 B. Dit is het tegenvoorbeeld: 0 zit in A en wèl in B , en 1 zit in A en niet in B .
 C. In deze situatie is er geen element in A dat niet in B zit, en ook geen element in A dat wèl in B zit.
 D. In dit geval is er geen element van A dat wèl in B zit.

11. Beschouw de volgende redenering, waar 2^X de machtsverzameling van X aanduidt.

Redenering. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$.

Deze redenering is niet geldig. Onder welke conditie kan een tegenvoorbeeld worden gevonden?

- A. $A = B$
B. $A \neq B$
 C. $A \subseteq B$
 D. $B \subseteq A$

Antwoord: Voor alle verzamelingen A en B waarvoor geldt $A \subseteq B$ of $B \subseteq A$ is deze uitspraak waar. Alleen antwoord B geeft dus een situatie waarin deze uitspraak inderdaad onwaar is.

- A. Als $A = B$, staat er $2^B \cup 2^B = 2^B = 2^{B \cup B} = 2^B$.
- B. Als $A \neq B$ kan een tegenvoorbeeld gevonden worden. Een tegenvoorbeeld wordt bijvoorbeeld gevormd door $A = \{0\}$ en $B = \{1\}$. Dan is $2^A = \{\emptyset, \{0\}\}$, $2^B = \{\emptyset, \{1\}\}$, dus $2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$, en $A \cup B = \{0, 1\}$, dus $2^{A \cup B} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$, dus $2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}$.
- C. Als $A \subseteq B$, is $2^A \cup 2^B = 2^B$, en is $A \cup B = B$, dus ook $2^{A \cup B} = 2^B$.
- D. Als $B \subseteq A$, is $2^A \cup 2^B = 2^A$, en is $A \cup B = A$, dus ook $2^{A \cup B} = 2^A$.

12. Laat L een eerste-ordetaal zijn met in het niet-logisch alfabet het éénplaatsige predicaatsymbool P , het tweeplaatsige predicaatsymbool T en de tweeplaatsige functie f . Welke uitspraak is **niet** waar?

- A. $\neg T(c_{18}, f(x_3, c_{18})) \in \text{ATOM}$
- B. $f(c_7, f(x_8, c_5)) \in \text{TERM} - \text{VAR}$
- C. $\neg(f(c_9, x_1) = f(c_0, c_1)) \in \text{FORM} - \text{ZIN}$
- D. $P(f(c_1, x_1)) \in \text{LIT}$

Antwoord:

- A. Dit is niet waar. Het is wel zo dat $T(c_{18}, f(x_3, c_{18}))$ een atoom is, maar met de negatie ervoor is het weliswaar een literaal (en dus een formule), maar geen atoom.
- B. De verzameling $\text{TERM} - \text{VAR}$ bevat termen die geen variabelen zijn. De expressie $f(c_7, f(x_8, c_5))$ is zo'n term.
- C. De verzameling $\text{FORM} - \text{ZIN}$ bevat formules die geen zinnen zijn, dus formules waarin vrije variabelen voorkomen. De expressie $\neg(f(c_9, x_1) = f(c_0, c_1))$ is daar (vanwege de variabele x_1) een voorbeeld van.
- D. De formule $P(f(c_1, x_1))$ is een atoom, dus ook een literaal.

13. Beschouw de eerste-ordetaal T met in het niet-logisch alfabet het éénplaatsige predicaatsymbool P en het tweeplaatsige predicaatsymbool G , met als betekenis van $P(x)$ dat " x is een priemgetal," en van $G(x, y)$ dat " x is groter dan y ." Stel dat we de propositie "er bestaat geen grootste priemgetal" willen uitdrukken in de taal T . Welke van de volgende formules doet dat **niet**?

- A. $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow (P(y) \wedge G(y, x)))$
- B. $\forall x (\neg P(x) \vee \neg \forall y \neg (P(y) \wedge G(y, x)))$
- C. $\forall x (P(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge G(y, x)))$
- D. $\neg \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \vee \neg G(y, x)))$

Antwoord:

$$\begin{aligned}
\neg \exists x (P(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge G(y, x))) &\equiv \forall x \neg (P(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge G(y, x))) \\
&\equiv \forall x \neg (P(x) \wedge \forall y \neg (P(y) \wedge G(y, x))) \\
&\equiv \forall x (\neg P(x) \vee \neg \forall y \neg (P(y) \wedge G(y, x))) \quad \text{dit is een antwoord} \\
&\equiv \forall x (\neg P(x) \vee \exists y \neg \neg (P(y) \wedge G(y, x))) \\
&\equiv \forall x (\neg P(x) \vee \exists y (P(y) \wedge G(y, x))) \\
&\equiv \forall x \exists y (\neg P(x) \vee (P(y) \wedge G(y, x))) \\
&\equiv \forall x \exists y (P(x) \rightarrow (P(y) \wedge G(y, x))) \quad \text{dit is een antwoord}
\end{aligned}$$

De eerste formule kunnen we ook als volgt herschrijven.

$$\begin{aligned}
\neg \exists x (P(x) \wedge \neg \exists y (P(y) \wedge G(y, x))) &\equiv \neg \exists x (P(x) \wedge \forall y \neg (P(y) \wedge G(y, x))) \\
&\equiv \neg \exists x (P(x) \wedge \forall y (\neg P(y) \vee \neg G(y, x))) \quad \text{dit is een antwoord}
\end{aligned}$$

14. Een operatie is 'commutatief' als de volgorde van de argumenten niet uitmaakt. In de rekenkunde is *vermenigvuldigen* commutatief, want $a \cdot b = b \cdot a$, maar is *delen* niet commutatief, want $a/b \neq b/a$ (in het algemeen). Welke formule in een eerste-ordetaal met in het niet-logisch alfabet het tweepaatsige functiesymbool f , drukt uit dat f niet commutatief is?

- A. $\forall x \forall y \neg (f(x, y) = f(y, x))$
- B. $\forall x \exists y \neg (f(x, y) = f(y, x))$
- C. $\exists x \forall y \neg (f(x, y) = f(y, x))$
- D. $\exists x \exists y \neg (f(x, y) = f(y, x))$

Antwoord: De functie f is commutatief als voor alle mogelijk waarden van de argumenten x en y geldt dat $f(x, y) = f(y, x)$, oftewel: $\forall x \forall y (f(x, y) = f(y, x))$. De negatie hiervan (" f is niet commutatief") kunnen we als volgt herschrijven:

$$\begin{aligned}
\neg \forall x \forall y (f(x, y) = f(y, x)) &\equiv \exists x \neg \forall y (f(x, y) = f(y, x)) \\
&\equiv \exists x \exists y \neg (f(x, y) = f(y, x))
\end{aligned}$$

Dat is dus het goede antwoord (D).

15. Beschouw de eerste-ordetaal M met in het niet-logisch alfabet het éénpaatsige predicaatsymbool P . De formule $\exists x P(x)$ is waar in elke structuur $\mathcal{A}$ voor deze taal waarin de verzameling $P^{\mathcal{A}}$ niet leeg is, dus *tenminste* één element heeft. Soms willen we niet alleen zeggen dat er *tenminste één* object met eigenschap P bestaat, maar dat er *precies één* object met eigenschap P bestaat. (Dit wordt geschreven als $\exists! x P(x)$.) Welke van de onderstaande formules in de taal M drukt dit uit?

- A. $\exists x \forall y (P(x) \wedge (P(y) \rightarrow \neg(x = y)))$
- B. $\exists x \exists y ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (x = y))$
- C. $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow (x = y)))$
- D. $\exists x (P(x) \wedge \exists y (P(y) \rightarrow \neg(x = y)))$

Antwoord: Er is één object met eigenschap P betekent allereerst dat er een object bestaat met eigenschap P (dus $\exists x P(x)$), en dat er niet nog een object met eigenschap P bestaat, dus er bestaat

geen y met eigenschap P die ongelijk aan x is: $\neg\exists y(P(y) \wedge \neg(x = y))$. Een formule die dus uitdrukt wat we willen is $\exists x(P(x) \wedge \neg\exists y(P(y) \wedge \neg(x = y)))$. We kunnen deze formule herschrijven.

$$\begin{aligned}\exists x(P(x) \wedge \neg\exists y(P(y) \wedge \neg(x = y))) &\equiv \exists x(P(x) \wedge \forall y\neg(P(y) \wedge \neg(x = y))) \\ &\equiv \exists x(P(x) \wedge \forall y(\neg P(y) \vee \neg\neg(x = y))) \\ &\equiv \exists x(P(x) \wedge \forall y(\neg P(y) \vee (x = y))) \\ &\equiv \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow (x = y))) \quad \text{dit is antwoord C}\end{aligned}$$

Open vragen

1. Bewijs met volledige inductie de volgende stelling.

Stelling. Voor alle natuurlijke getallen $n \geq 0$ geldt

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Antwoord:

Bewijs. Het predicaat $P(n)$ betekent dat voor geheel getal n geldt: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$.

Basis ($n = 0$): We moeten eerst laten zien dat $P(n)$ waar is als $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = \sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Dus $P(n)$ is waar voor $n = 0$.

Inductiestap: Te bewijzen is dat alle gehele getallen ≥ 0 de eigenschap P , als ze die hebben, "doorgeven" aan hun opvolger. Met andere woorden, we moeten bewijzen dat voor alle $n \geq 0$ geldt: $P(n) \rightarrow P(n+1)$. Omdat we een uitspraak voor *alle* getallen ≥ 0 moeten bewijzen, nemen we een willekeurig geheel getal ≥ 0 , zeg k . We moeten voor dat willekeurige getal k de implicatie bewijzen: $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Om een implicatie te bewijzen nemen we het antecedent aan, en proberen we onder die aanname het consequent af te leiden. Stel dus dat $P(k)$ waar is, dus dat $\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$ (dit is de inductiehypothese IH). We moeten nu bewijzen dat $P(k+1)$ waar is, dus dat $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{(k+1)+1} - 1$. We beginnen daartoe aan de linkerkant ($\sum_{i=0}^{k+1} 2^i$), en proberen daaruit te herleiden dat die som gelijk is aan $2^{(k+1)+1} - 1$. Hierbij moeten we gebruik maken van de IH, dus moeten we $\sum_{i=0}^k 2^i$ isoleren, zodat we daarvoor

$2^{k+1} - 1$ mogen invullen.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k+1} 2^i &= \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^k}_{\text{dit is } \sum_{i=0}^k 2^i} + 2^{k+1} \\
 &= \sum_{i=0}^k 2^i + 2^{k+1} && \text{(laatste term van de som afsplitsen)} \\
 &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} && \text{(volgens de IH is } \sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1) \\
 &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 && \text{(herschikken)} \\
 &= 2^1 \cdot 2^{k+1} - 1 && \text{(voor alle } x \text{ geldt } x = x^1) \\
 &= 2^{k+1+1} - 1 && \text{exponenten optellen}
 \end{aligned}$$

Omdat k een willekeurig getal ≥ 0 is, geldt de implicatie voor alle $n \geq 0$.

Volgens het inductie principe geldt $P(n)$ nu voor alle $n \geq 0$.

QED

2. Geef in het **niet-uitgebreide** systeem van Fitch de volgende afleiding.

Stelling. $\neg(p \rightarrow \neg q) \vdash \neg p \rightarrow \neg q$

Antwoord:

1		$\neg(p \rightarrow \neg q)$	hypothese 1
2		$\neg p$	hypothese 2
3			hypothese 3
4			hypothese 4
5			hypothese 5
6			rei, 4
7			rei, 2
8			$\neg$ -intro, 5, 6, 7
9			$\rightarrow$ -intro, 4, 8
10			rei, 1
11			$\neg$ -intro, 3, 9, 10
12			$\rightarrow$ -intro, 2, 11

3. Laat eerste-ordetaal L met in het niet-logisch alfabet het éénplaatsige functiesymbool f gegeven zijn. Beschouw de volgende redenering, uitgedrukt in L .

Redenering. $\therefore \forall x \forall y ((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$

- (a) Maak een boom voor de redenering hierboven.

Antwoord:

- | | | |
|------|--|---|
| 1. ✓ | $\neg \forall x \forall y ((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$ | $\neg$ -conclusie |
| 2. ✓ | $\exists x \neg \forall y ((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$ | $\forall$ -regel, 1 |
| 3. ✓ | $\neg \forall y ((f(a) = f(y)) \rightarrow (a = y))$ | $\exists$ -regel, 2 [$x := a$] |
| 4. ✓ | $\exists y \neg ((f(a) = f(y)) \rightarrow (a = y))$ | $\forall$ -regel, 3 |
| 5. ✓ | $\neg ((f(a) = f(b)) \rightarrow (a = b))$ | $\exists$ -regel, 4 [$y := b$] (nieuwe naam!) |
| 6. ✓ | $((f(a) = f(b)) \wedge \neg(a = b))$ | $\rightarrow$ -regel, 5 |
| 7. | $(f(a) = f(b))$ | $\wedge$ -regel, 6 |
| 8. | $\neg(a = b)$ | $\wedge$ -regel, 6 |

(b) (Deze twee deelvragen gaan over je antwoord.)

i. Schrijf je conclusie op ("De redenering is geldig/niet geldig.").

Antwoord: De redenering is niet geldig. Het zou goed zijn als je dit meteen zou hebben ingezien: Twee verschillende objecten in het domein kunnen best dezelfde functiewaarde toegekend krijgen. Een tegenvoorbeeld: Het kwadraat van zowel -2 als 2 is bijvoorbeeld 4 . Dus $f(-2) = f(2)$, maar $-2 \neq 2$.

ii. Maak duidelijk hoe deze conclusie volgt uit je boom, en betrek in je uitleg ook de verzameling met daarin (de premissen en) de negatie van de conclusie.

Antwoord: De conclusie dat de redenering niet geldig is, volgt uit het feit dat tenminste één tak van de boom niet sluit. Dit betekent dat de verzameling met daarin (de premissen en) de negatie van de conclusie vervulbaar is (door een tegenvoorbeeld), dus dat het niet zo is dat in alle omstandigheden (waarin de premissen waar zijn) de conclusie waar is.

(c) (Beantwoord onderstaande vragen alleen als je denkt dat de redenering **niet geldig** is.)

i. Leg uit hoe je een tegenvoorbeeld uit de boom kunt afleiden.

Antwoord: Een tegenvoorbeeld volgt uit de boom doordat het een situatie is waarin alle niet-afgevinkte (dus niet herschreven) formules in de boom waar zijn.

ii. Geef een tegenvoorbeeld in de vorm van zowel een plaatje als een formeel gedefinieerde structuur.

Antwoord: Een tegenvoorbeeld is een wiskundige structuur. In de vorm van een plaatje is het een rechthoek die het domein van de structuur weergeeft, met daarin twee *verschillende* objecten voor de namen die we gebruikt hebben (a en b). Deze moeten verschillend zijn, omdat formule 8 zegt dat $\neg(a = b)$ waar moet zijn. We hebben ook nog een object in het domein nodig dat de functiewaarde van zowel a als b aanduidt (omdat volgens formule 7 moet gelden dat $(f(a) = f(b))$), maar dat kan ook a of b zelf zijn. Nu lopen er tenslotte nog pijlen van de objecten die a en b aanduiden naar het object dat $f(a)$ (en dus ook $f(b)$) aanduidt.

Formeel gedefinieerd hebben we het over een structuur $\mathcal{A} = \langle D; f_0; d_0, d_1 \rangle$, waar het domein $D = \{d_0, d_1\}$, waar $f_0 = \{(d_0, d_0), (d_1, d_0)\}$ en waar $f^{\mathcal{A}} = f_0$, $a^{\mathcal{A}} = d_0$ en $b^{\mathcal{A}} = d_1$.

iii. Beschrijf hoe je tegenvoorbeeld de ongeldigheid van de redenering aantoont.

Antwoord: De structuur $\mathcal{A}$ is een tegenvoorbeeld omdat het een situatie laat zien waarin objecten bestaat die we voor x en y kunnen invullen zodat de implicatie $((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$ niet waar is. Het antecedent is namelijk waar in $\mathcal{A}$, want zowel d_0 als d_1 zitten met hetzelfde object (d_0) in $f^{\mathcal{A}}$, maar het consequent is niet waar in $\mathcal{A}$, want $d_0 \neq d_1$.