

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

Redeneren en Logica

25 januari 2012, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor **4 punten**, en 3 open vragen in totaal goed voor **5 punten**. Gebruik deze informatie om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
 - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
 - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
 - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf als je zeker van je antwoorden bent de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
 - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
 - Vul op het meerkeuzeformulier je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
 - Zet je **handtekening** op je MAF.
- Wat betreft de **open vragen**:
 - Alle open vragen tellen even zwaar.
 - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
 - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven.
Lever geen kladpapier in, dat kijk ik niet na.
 - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
 - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
 - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 3.

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de volgende formule uit *PROP*: $F = (\neg(p_0 \wedge p_2) \rightarrow (p_0 \vee p_4))$. Hieronder wordt de waarheidswaarde van F afgeleid volgens de recursieve definitie van de functie v en de waarheidsfuncties voor elk van de connectieven.

$$v((\neg(p_0 \wedge p_2) \rightarrow (p_0 \vee p_4))) = f_{\rightarrow}(v(\neg(p_0 \wedge p_2)), v((p_0 \vee p_4))) \quad (1)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(v(p_0 \wedge p_2)), v((p_0 \vee p_4))) \quad (2)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(v(p_0 \wedge p_2)), f_{\vee}(v(p_0), v(p_4))) \quad (3)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(f_{\wedge}(v(p_0), v(p_2))), f_{\vee}(v(p_0), v(p_4))) \quad (4)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(\min(v(p_0), v(p_2))), f_{\vee}(v(p_0), v(p_4))) \quad (5)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(\min(v(p_0), v(p_2))), \max(v(p_0), v(p_4))) \quad (6)$$

$$= f_{\rightarrow}(1 - \min(v(p_0), v(p_2)), \max(v(p_0), v(p_4))) \quad (7)$$

$$= \max(1 - \min(v(p_0), v(p_2)), 1 - \max(v(p_0), v(p_4))) \quad (8)$$

In welke regel van de afleiding is een fout gemaakt?

- A. regel (2).
 - B. regel (4).
 - C. regel (6).
 - D. regel (8).
2. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$f(p_i) = 1 \quad \text{voor elke } i \in \mathbb{N}$$

$$f(\neg A) = f(A) + 1 \quad \text{voor } A \in PROP$$

$$f((A \star B)) = f(A) + f(B) + 1 \quad \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

Welke waarde kent de functie f die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in *PROP*?

- A. De diepte van de ontledingsboom van de formule.
 - B. Het aantal subformules van de formule.
 - C. De complexiteit van de formule.
 - D. De lengte van de formule.
3. Zij gegeven een logisch geldige redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Zij verder gegeven dat C geen tautologie is. Welke van de onderstaande uitspraken is dan zeker waar?
- A. De verzameling Γ heeft geen model.
 - B. Alle valuaties zijn model voor Γ .
 - C. $\Gamma \neq \emptyset$.
 - D. De formule C is een contradictie.
4. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$ die logisch geldig is, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Welke van de onderstaande uitspraken is dan zeker waar?
- A. Als C een contingentie is, heeft Γ een model.
 - B. Als C een contradictie is, heeft Γ geen model.
 - C. Als Γ geen model heeft, is C een contradictie.
 - D. Als Γ een model heeft, is C geen contingentie.
5. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als *alle* takken van een boom voor deze redenering open blijven, welke uitspraak is dan waar?
- A. Als C een tautologie is, is Γ vervulbaar.
 - B. De verzameling Γ kan onvervulbaar zijn.
 - C. $\Gamma \neq \emptyset$.
 - D. Alle valuaties vormen een tegenvoorbeeld.

6. Zij gegeven een redenering $\Gamma \vdash C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als we met de resolutiemethode de lege disjunctie niet kunnen afleiden, wat weten we dan zeker?

- A. Als $\Gamma = \emptyset$, is C een tautologie.
- B. Als $\Gamma = \emptyset$, is C een contradictie.
- C. Als $\Gamma = \emptyset$, is C geen tautologie.
- D. Als $\Gamma = \emptyset$, is C geen contradictie.

7. Stel dat A en B formules zijn waarvoor geldt dat $\models \neg A \vee \neg B$. Welke uitspraak is dan niet waar?

- A. $\models \neg(A \wedge B)$
- B. $\not\models (A \wedge B)$
- C. $B \models \neg A$
- D. $\neg A \models B$

8. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als $(\neg A \models B \text{ en } \sim \models A)$, dan $\models B$.

De redenering is niet logisch geldig. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

- A. $A = p$ en $B = \neg p$
- B. $A = (p \vee \neg p)$ en $B = p$
- C. $A = p$ en $B = (p \vee \neg p)$
- D. $A = (p \wedge \neg p)$ en $B = (p \vee \neg p)$

9. Zij A, B en C formules waarvoor geldt dat $A, B \models C$. Noem de verzamelingen modellen van A, B en C respectievelijk M_A, M_B , en M_C . Welke van de volgende uitspraken is noodzakelijkerwijs waar?

- A. $(M_A \cap M_B) - M_C = \emptyset$
- B. $(M_A \cup M_B) - M_C = \emptyset$
- C. $(M_A \cup M_B) \subseteq M_C$
- D. $M_C - (M_A \cap M_B) = \emptyset$

10. Zij gegeven verzamelingen A, B en C in universum U . Beschouw de verzameling $D = ((A \cup B)^c \cap C)^c$. Welke van de volgende uitspraken is waar?

- A. $((A \cap B)^c \cap C) \subseteq D^c$
- B. $(A \cup B)^c \subseteq D$
- C. $D^c \subseteq B^c$
- D. $D \subseteq (C - A)^c$

11. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$.

De redenering is niet logisch geldig. Welk paar verzamelingen vormt een tegenvoorbeeld?

- A. $A = \emptyset$ en $B = \{1\}$
- B. $A = \{0\}$ en $B = \{1\}$
- C. $A = \{0, 1\}$ en $B = \{1\}$
- D. $A = \{0, 1\}$ en $B = \{0, 1\}$

12. Beschouw de verzameling $B = TERM - (VAR \cap GTERM)$. Welke van de onderstaande uitspraken is waar?

- A. $f_0(x_0) \notin B$ en $x_0 \notin B$
- B. $c_0 \in B$ en $f_0(x_0) \notin B$
- C. $f_0(c_0) \notin B$ en $x_0 \in B$
- D. $f_0(c_0) \in B$ en $x_0 \in B$

13. Beschouw de eerste-ordetaal $\mathcal{L}$, met als niet-logische symbolen tweepaatsig predicaat D ("deelt") en tweepaatsige functies p ("product") en s ("som"). Beschouw verder de structuur $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; R_0, R_1, R_2 \rangle$, met als domein de verzameling natuurlijke getallen $\mathbb{N}$. De structuur bevat verder de relatie $R_0 = D^{\mathcal{A}}$ die alle paren natuurlijke getallen (a, b) bevat waarvoor er een natuurlijk getal c bestaat zodat $b = ca$, en de relaties $R_1 = p^{\mathcal{A}}$ en $R_2 = s^{\mathcal{A}}$. Verzamelingen R_1 respectievelijk R_2 bevatten alle drietallen natuurlijke getallen (a, b, c) waarvoor geldt dat $c = a \cdot b$, respectievelijk $c = a + b$. Welke formule is onwaar in $\mathcal{A}$?
- A. $\forall x \forall y \forall z ((D(x, y) \wedge D(y, z)) \rightarrow D(x, z))$
 B. $\forall x \forall y ((D(x, y) \wedge D(y, x)) \rightarrow x = y)$
 C. $\forall x \forall y \forall z ((D(x, y) \wedge D(x, s(y, z))) \rightarrow D(x, z))$
 D. $\forall x \forall y \forall z ((D(x, y) \wedge D(x, p(y, z))) \rightarrow D(x, z))$
14. Beschouw opnieuw de taal $\mathcal{L}$ van de vorige vraag, en de structuur $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}; R_0, R_1, R_2 \rangle$ met als domein de verzameling gehele getallen $\mathbb{Z}$. De relatie R_0 is nu de verzameling paren gehele getallen (a, b) waarvoor geldt dat er een geheel getal c bestaat zodat $b = ca$. De relaties R_1 en R_2 zijn de verzamelingen van drietallen gehele getallen (a, b, c) waarvoor geldt dat $c = a \cdot b$ en $c = a + b$, respectievelijk. Welke van de bij vraag 13 genoemde formules, die in structuur $\mathcal{A}$ waar is, is in structuur $\mathcal{B}$ onwaar?
- A. A
 B. B
 C. C
 D. D
15. Stel dat in een tak van een boom volgens de boommethode de volgende formules voorkomen.

- $$\begin{array}{l} \vdots \\ i. \quad \neg(\forall x Q(x) \vee \neg Q(b)) \\ j. \quad \exists x (\neg Q(x) \rightarrow Q(d)) \\ k. \quad \forall x (\neg Q(x) \wedge \neg Q(e)) \\ l. \quad \forall x (Q(c) \rightarrow \neg Q(d)) \end{array}$$

Op welke van de volgende manieren mag deze tak worden vervolgd met formule m ?

- A. $m. \quad \neg \forall x Q(x) \wedge Q(b) \quad \vee\text{-regel, } i$
 B. $m. \quad \neg Q(c) \rightarrow Q(d) \quad \rightarrow\text{-regel, } j$
 C. $m. \quad \neg Q(c) \wedge \neg Q(e) \quad \forall\text{-regel, } k$
 D. $m. \quad \forall x (\neg Q(c) \vee \neg Q(d)) \quad \rightarrow\text{-regel, } l$

Open vragen

1. Bepaal met de boommethode of de volgende redenering geldig is of niet. (1) Geef duidelijk antwoord en (2) leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de redenering niet geldig is, geef dan (3) een **tegenvoorbeeld** dat dit aantoonst (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg **duidelijk** uit (4) hoe je dit tegenvoorbeeld uit de boom hebt afgeleid, en (5) hoe dit tegenvoorbeeld aantoonst dat de redenering niet geldig is. (De vraag is dus of de gegeven formule een tautologie is.)

Redenering. $\therefore \exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y)).$

2. Geef in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende afleiding.

Stelling. $p \wedge (q \vee r) \vdash \neg(p \wedge q) \rightarrow r.$

3. Bepaal of de volgende redenering geldig is. Als je denkt dat de redenering geldig is, geef dan een bewijs. Als je denkt dat de redenering niet geldig is, geef dan een tegenvoorbeeld (in de vorm van specifieke formules uit $PROP$) en **leg uit** hoe het tegenvoorbeeld duidelijk maakt dat de redenering niet geldig is.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als $A \models B$ en $\sim \models B$ dan $\sim \models A$.