

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

Redeneren en Logica

25 januari 2012, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor **4 punten**, en 3 open vragen in totaal goed voor **5 punten**. Gebruik deze informatie om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
 - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
 - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
 - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf als je zeker van je antwoorden bent de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
 - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
 - Vul op het meerkeuzeformulier je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
 - Zet je **handtekening** op je MAF.
- Wat betreft de **open vragen**:
 - Alle open vragen tellen even zwaar.
 - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
 - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven.
Lever geen kladpapier in, dat kijk ik niet na.
 - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
 - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
 - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 9.

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de volgende formule uit $PROP$: $F = (\neg(p_0 \wedge p_2) \rightarrow (p_0 \vee p_4))$. Hieronder wordt de waarheidswaarde van F afgeleid volgens de recursieve definitie van de functie v en de waarheidsfuncties voor elk van de connectieven.

$$v((\neg(p_0 \wedge p_2) \rightarrow (p_0 \vee p_4))) = f_{\rightarrow}(v(\neg(p_0 \wedge p_2)), v((p_0 \vee p_4))) \quad (1)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(v(p_0 \wedge p_2)), v((p_0 \vee p_4))) \quad (2)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(v(p_0 \wedge p_2)), f_{\vee}(v(p_0), v(p_4))) \quad (3)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(f_{\wedge}(v(p_0), v(p_2))), f_{\vee}(v(p_0), v(p_4))) \quad (4)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(\min(v(p_0), v(p_2))), f_{\vee}(v(p_0), v(p_4))) \quad (5)$$

$$= f_{\rightarrow}(f_{\neg}(\min(v(p_0), v(p_2))), \max(v(p_0), v(p_4))) \quad (6)$$

$$= f_{\rightarrow}(1 - \min(v(p_0), v(p_2)), \max(v(p_0), v(p_4))) \quad (7)$$

$$= \max(1 - \min(v(p_0), v(p_2)), 1 - \max(v(p_0), v(p_4))) \quad (8)$$

In welke regel van de afleiding is een fout gemaakt?

- A. regel (2).
- B. regel (4).
- C. regel (6).
- D. regel (8).**

Antwoord: De fout is gemaakt in de laatste regel (8): $f_{\rightarrow}(x, y) = \max(1 - x, y)$, niet $\max(x, 1 - y)$.

2. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$f(p_i) = 1 \quad \text{voor elke } i \in \mathbb{N}$$

$$f(\neg A) = f(A) + 1 \quad \text{voor } A \in PROP$$

$$f((A \star B)) = f(A) + f(B) + 1 \quad \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

Welke waarde kent de functie f die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in $PROP$?

- A. De diepte van de ontledingsboom van de formule.
- B. Het aantal subformules van de formule.**
- C. De complexiteit van de formule.
- D. De lengte van de formule.

Antwoord: In de functie van de diepte van de ontledingsboom komt een $\max$ voor in het bepalen van $f((A \star B))$, de complexiteit telt het aantal connectieven, dus daarin is $f(p_i) = 0$, bij de lengte is $f((A \star B)) = f(A) + f(B) + 3$. Het correcte antwoord is B, het aantal subformules: een propositievariabele is een formule en heeft dus één subformule, een negatie voor een formule A zetten verhoogt het aantal subformules met 1, en hetzelfde geldt voor het construeren van een formule door twee formules met een twee-plaatsig connectief te verbinden en er haakjes omheen te zetten.

3. Zij gegeven een logisch geldige redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Zij verder gegeven dat C geen tautologie is. Welke van de onderstaande uitspraken is dan zeker waar?

- A. De verzameling Γ heeft geen model.
- B. Alle valuaties zijn model voor Γ .
- C. $\Gamma \neq \emptyset$.**
- D. De formule C is een contradictie.

Antwoord:

- A. De verzameling Γ kan wel een model hebben, zolang dat maar niet een valuatie is waarvoor $v(C) = 0$, want dan zou de redenering niet logisch geldig zijn.
- B. Niet alle valuaties hoeven model voor Γ te zijn. Er kunnen wel valuaties zijn die niet alle formules in Γ waar maken, zolang valuaties die wèl model voor Γ zijn, maar niet ook model voor $\neg C$ zijn.
- C. Als $\Gamma = \emptyset$, moet C een tautologie zijn om de redenering geldig te laten zijn. Maar er is gegeven dat C geen tautologie is, dus kan Γ niet $\emptyset$ zijn.
- D. De formule C hoeft geen contradictie te zijn, want het kan ook een contingentie zijn, zolang dan maar geen valuaties waarvoor $v(C) = 0$, model voor Γ zijn.

4. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$ die logisch geldig is, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Welke van de onderstaande uitspraken is dan zeker waar?

- A. Als C een contingentie is, heeft Γ een model.
- B. Als C een contradictie is, heeft Γ geen model.**
- C. Als Γ geen model heeft, is C een contradictie.
- D. Als Γ een model heeft, is C geen contingentie.

Antwoord:

- A. Als C een contingentie is, hoeft Γ geen model te hebben. De redenering is geldig, dus voor de valuaties waarvoor $v(C) = 0$, mag in elk geval niet gelden dat $v(\Gamma) = 1$, want anders zou de redenering niet geldig zijn. Voor de valuaties waarvoor $v(C) = 1$, zijn er geen beperkingen, dus die valuaties hoeven ook geen model voor Γ te zijn.
- B. Als C een contradictie is, mag er geen valuatie zijn waarvoor $v(\Gamma) = 1$, want die valuatie zou een tegenvoorbeeld zijn, terwijl is gegeven dat de redenering geldig is.
- C. Als Γ geen model heeft, kan er geen tegenvoorbeeld bestaan, en maakt het niet uit wat C is. We weten dus niet zeker dat C dan een contradictie is.
- D. Als Γ een model heeft, mag die valuatie C niet onwaar maken, en mag C dus geen contradictie zijn. Maar we weten niet zeker dat C dan geen contingentie is.

5. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als alle takken van een boom voor deze redenering open blijven, welke uitspraak is dan waar?

- A. Als C een tautologie is, is Γ vervulbaar.**
- B. De verzameling Γ kan onvervulbaar zijn.
- C. $\Gamma \neq \emptyset$.
- D. Alle valuaties vormen een tegenvoorbeeld.

Antwoord: Dit was in zekere zin een strikvraag.

- A. Deze implicatie is waar, want het antecedent is onwaar. De formule C is namelijk geen tautologie, omdat dan niet alle takken van de boom open zouden zijn gebleven.
- B. De verzameling Γ kan niet onvervulbaar zijn, omdat de verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar is en dus ook Γ vervulbaar is. Dat moet, omdat er een tegenvoorbeeld is dat $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervult, aangezien

de redenering ongeldig is, daar niet alle takken sluiten. (N.B.: de lege verzameling wordt vervuld door elke valuatie, zie dictaat *Logica*, p. 35).

- C. De verzameling Γ kan wel de lege verzameling zijn, als C geen tautologie is.
- D. Niet alle valuaties hoeven een tegenvoorbeeld te vormen. Een boom voor de redenering $p \therefore q$ heeft maar één tak, die niet sluit (dus alle takken sluiten). Maar niet alle valuaties vormen een tegenvoorbeeld, alleen die valuaties waarvoor geldt $v(p) = 1$ en $v(q) = 0$.

6. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als we met de resolutiemethode de lege disjunctie niet kunnen afleiden, wat weten we dan zeker?

- A. Als $\Gamma = \emptyset$, is C een tautologie.
- B. Als $\Gamma = \emptyset$, is C een contradictie.
- C. Als $\Gamma = \emptyset$, is C geen tautologie.**
- D. Als $\Gamma = \emptyset$, is C geen contradictie.

Antwoord: Als we de lege disjunctie niet kunnen afleiden, is de redenering niet logisch geldig. Merk allereerst op dat als $\Gamma = \emptyset$, alle valuaties model voor Γ zijn.

- A. Als $\Gamma = \emptyset$, is C juist géén tautologie. Als C wel een tautologie zou zijn, bestaat er geen tegenvoorbeeld: Een valuatie die Γ vervult, wat alle valuaties doen als $\Gamma = \emptyset$, en C niet vervult. Zo'n tegenvoorbeeld moet er zijn, omdat gegeven is dat we de lege disjunctie niet kunnen afleiden.
- B. Als $\Gamma = \emptyset$, kan C ook een contingentie zijn: Ook dan is de redenering niet geldig.
- C. Als $\Gamma = \emptyset$, is C geen tautologie (zie de uitleg bij A.).
- D. Als $\Gamma = \emptyset$, kan C wel een contradictie zijn. Dan zijn namelijk alle valuaties tegenvoorbeeld.

7. Stel dat A en B formules zijn waarvoor geldt dat $\models \neg A \vee \neg B$. Welke uitspraak is dan niet waar?

- A. $\models \neg(A \wedge B)$
- B. $\sim \models (A \wedge B)$
- C. $B \models \neg A$
- D. $\neg A \models B$**

Antwoord: Allereerst is het zo dat $\neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \wedge B) \equiv A \rightarrow \neg B \equiv B \rightarrow \neg A$.

- A. Als $\neg A \vee \neg B$ een tautologie is, is, omdat $\neg A \vee \neg B \equiv \neg(A \wedge B)$, ook $\neg(A \wedge B)$ een tautologie.
- B. Als $\neg A \vee \neg B$ en dus ook $\neg(A \wedge B)$ een tautologie is, is $A \wedge B$ geen tautologie, dus dit is waar.
- C. Omdat $\models B \rightarrow \neg A$ waar is als $\models \neg A \vee \neg B$, is ook $B \models \neg A$ waar.
- D. Het is niet voor alle formules A en B waarvoor geldt dat $\models \neg A \vee \neg B$, het geval dat $\neg A \models B$. Als bijvoorbeeld zowel A als B een contradictie is, zijn zowel $\neg A$ als $\neg B$ tautologieën, en is $\neg A \vee \neg B$ ook een tautologie. Maar alle valuaties maken dan $\neg A$ waar, en B onwaar, en zijn dus tegenvoorbeeld voor $\neg A \models B$.

8. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als $(\neg A \models B \text{ en } \sim \models A)$, dan $\models B$.

De redenering is niet logisch geldig. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

- A. $A = p$ en $B = \neg p$
- B. $A = (p \vee \neg p)$ en $B = p$
- C. $A = p$ en $B = (p \vee \neg p)$
- D. $A = (p \wedge \neg p)$ en $B = (p \vee \neg p)$

Antwoord: De redenering is niet geldig, dus niet voor alle formules A en B geldt de implicatie. Dat wil zeggen dat er formules A en B bestaan, waarvoor de implicatie niet geldt. (Als $\neg\forall x\forall yA$, dan geldt $\exists x\neg\forall yA$, en dus $\exists x\exists y\neg A$.) We zoeken dus twee formules A en B waarvoor de implicatie onwaar is, dus waarvoor het antecedent waar is, maar het consequent onwaar. Het antecedent is waar als zowel $\neg A \models B$ als $\sim \models A$ waar zijn, en het consequent is onwaar als $\sim \models B$ waar is. Dus formule B moet logisch volgen uit $\neg A$, formule A mag geen tautologie zijn, en formule B mag geen tautologie zijn. Bij antwoord B. is A een tautologie, en bij C. en D. is B een tautologie. Het moet dus wel A. zijn.

- A. $A = p$ en $B = \neg p$: Er geldt wel dat $\neg p \models \neg p$ en dat $\sim \models p$, maar niet dat $\models \neg p$. Dit is dus het correcte antwoord.
- B. $A = (p \vee \neg p)$ en $B = p$: Er geldt wel dat $\neg(p \vee \neg p) \models p$, maar niet dat $\sim \models (p \vee \neg p)$, want $(p \vee \neg p)$ is wel een tautologie.
- C. $A = p$ en $B = (p \vee \neg p)$: Er geldt wel dat $\neg p \models (p \vee \neg p)$ en dat $\sim \models p$, maar ook dat $\models (p \vee \neg p)$.
- D. $A = (p \wedge \neg p)$ en $B = (p \vee \neg p)$: Er geldt wel dat $\neg(p \wedge \neg p) \models (p \vee \neg p)$ en dat $\sim \models (p \wedge \neg p)$, maar ook dat $\models (p \vee \neg p)$.

9. Zij A , B en C formules waarvoor geldt dat $A, B \models C$. Noem de verzamelingen modellen van A , B en C respectievelijk M_A , M_B , en M_C . Welke van de volgende uitspraken is noodzakelijkerwijs waar?

- A. $(M_A \cap M_B) - M_C = \emptyset$
- B. $(M_A \cup M_B) - M_C = \emptyset$
- C. $(M_A \cup M_B) \subseteq M_C$
- D. $M_C - (M_A \cap M_B) = \emptyset$

Antwoord:

- A. De verzameling $(M_A \cap M_B) - M_C$ bevat alle valuaties die model zijn van A en van B , maar niet van C . Als deze verzameling een element zou hebben, zou dat een tegenvoorbeeld zijn voor $A, B \models C$, dus zo'n valuatie bestaat niet (omdat gegeven is dat $A, B \models C$ waar is): Deze verzameling moet leeg zijn.
- B. De verzameling $(M_A \cup M_B) - M_C = \emptyset$ bevat alle valuaties die model zijn van A of van B , en niet van C . Er kunnen best valuaties bestaan die model zijn van A (maar niet van B), en niet van C , of van B (maar niet van A) en niet van C . Deze verzameling hoeft dus niet leeg te zijn.
- C. De verzameling $(M_A \cup M_B)$ bevat alle valuaties die model zijn van A of B . Alle valuaties die model zijn voor A en B moeten ook model zijn voor C , maar er mogen modellen voor A (en niet voor B) bestaan die niet in M_C zitten, en er mogen ook modellen voor B (en niet voor A) bestaan die niet in M_C zitten. Deze uitspraak hoeft dus niet waar te zijn.
- D. De verzameling $M_C - (M_A \cap M_B)$ bevat alle valuaties die model zijn voor C , maar niet voor A en B (maar mogelijk wel voor één van beide). Deze verzameling hoeft dus niet leeg te zijn, want zolang een valuatie geen model is voor zowel A als B , mag hij best model voor C zijn.

10. Zij gegeven verzamelingen A , B en C in universum U . Beschouw de verzameling $D = ((A \cup B)^c \cap C)^c$. Welke van de volgende uitspraken is waar?

- A. $((A \cap B)^c \cap C) \subseteq D^c$
- B. $(A \cup B)^c \subseteq D$
- C. $D^c \subseteq B^c$
- D. $D \subseteq (C - A)^c$

Antwoord: Je kunt je verzameling D makkelijk voorstellen als de verzameling met daarin alle elementen die in $A \cup B$ zitten, of niet in C (of allebei uiteraard). Maak een Venn diagram met drie verzamelingen, en bekijk het deel van C dat niet overlapt met A of met B . Verzameling D is alles *buiten* die verzameling. Deze vraag is eerlijk gezegd wel een beetje "complement gone wild"...

- A. Deze uitspraak is niet waar: Alle elementen in $((A \cap C) - B)$ en in $((B \cap C) - A)$, zitten in $((A \cap B)^c \cap C)$ maar niet in D^c .
- B. Deze uitspraak is niet waar: Alle elementen in $(C - (A \cup B))$ zitten in $(A \cup B)^c$, maar niet in D .
- C. Deze uitspraak is waar. Je kunt er een bewijs voor geven, probeer maar.
- D. Deze uitspraak is niet waar: Alle elementen in $((C - A) \cap B)$ (oftewel $((B \cap C) - A)$) zitten in D , maar niet in $(C - A)^c$.

11. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle verzamelingen A en B geldt: $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$.

De redenering is niet logisch geldig. Welk paar verzamelingen vormt een tegenvoorbeeld?

- A. $A = \emptyset$ en $B = \{1\}$
- B. $A = \{0\}$ en $B = \{1\}$
- C. $A = \{0, 1\}$ en $B = \{1\}$
- D. $A = \{0, 1\}$ en $B = \{0, 1\}$

Antwoord: De redenering zegt dat voor alle A en B een zekere inclusierelatie geldt. Er is gegeven dat de redenering niet geldig is, dus er moeten verzamelingen A en B bestaan, waarvoor de inclusierelatie *niet* geldt. Dat wil zeggen, twee verzamelingen A en B waarvoor geldt dat er een element in $2^{A \cup B}$ zit, dat niet in $2^A \cup 2^B$ zit.

Merk allereerst op dat $2^\emptyset = \{\emptyset\}$, $2^{\{0\}} = \{\emptyset, \{0\}\}$, $2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$, en $2^{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

- A. Als $A = \emptyset$ en $B = \{1\}$, is $2^{A \cup B} = \{\emptyset, \{1\}\}$ en $2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{1\}\}$.
- B. Als $A = \{0\}$ en $B = \{1\}$, is $2^{A \cup B} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ en $2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$.
- C. Als $A = \{0, 1\}$ en $B = \{1\}$, is $2^{A \cup B} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ en $2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
- D. Als $A = \{0, 1\}$ en $B = \{0, 1\}$, is $2^{A \cup B} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ en $2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

We zien dat alleen in de situatie dat geen van beide verzamelingen deelverzameling is van de ander, namelijk wanneer $A = \{0\}$ en $B = \{1\}$, er een element in $2^{A \cup B}$ zit dat niet in $2^A \cup 2^B$ zit.

Je kunt zelf eens proberen te bewijzen dat wanneer één van de verzamelingen deelverzameling van de ander is, het wel zo is dat $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$. Het bewijs staat aan het eind van dit tentamen.

12. Beschouw de verzameling $B = \text{TERM} - (\text{VAR} \cap \text{GTERM})$. Welke van de onderstaande uitspraken is waar?

- A. $f_0(x_0) \notin B$ en $x_0 \notin B$
- B. $c_0 \in B$ en $f_0(x_0) \notin B$
- C. $f_0(c_0) \notin B$ en $x_0 \in B$
- D. $f_0(c_0) \in B$ en $x_0 \in B$

Antwoord: Gesloten termen (in GTERM) zijn termen die geen vrije variabelen bevatten. Variabelen (in VAR) zijn termen die vrije variabelen zijn. De doorsnede $\text{VAR} \cap \text{GTERM}$ bevat dus geen elementen: $\text{VAR} \cap \text{GTERM} = \emptyset$. Daarom is $B = \text{TERM} - \emptyset = \text{TERM}$. Het correcte antwoord is dus D, want alle termen zitten in B .

13. Beschouw de eerste-ordetaal $\mathcal{L}$, met als niet-logische symbolen tweepaatsig predicaat D ("deelt") en tweepaatsige functies p ("product") en s ("som"). Beschouw verder de structuur $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; R_0, R_1, R_2 \rangle$, met als domein de verzameling natuurlijke getallen $\mathbb{N}$. De structuur bevat verder de relatie $R_0 = D^{\mathcal{A}}$ die alle paren natuurlijke getallen (a, b) bevat waarvoor er een natuurlijk getal c bestaat zodat $b = ca$, en de relaties $R_1 = p^{\mathcal{A}}$ en $R_2 = s^{\mathcal{A}}$. Verzamelingen R_1 respectievelijk R_2 bevatten alle drietallen natuurlijke getallen (a, b, c) waarvoor geldt dat $c = a \cdot b$, respectievelijk $c = a + b$. Welke formule is onwaar in $\mathcal{A}$?

- A. $\forall x \forall y \forall z ((D(x, y) \wedge D(y, z)) \rightarrow D(x, z))$
- B. $\forall x \forall y ((D(x, y) \wedge D(y, x)) \rightarrow x = y)$
- C. $\forall x \forall y \forall z ((D(x, y) \wedge D(x, s(y, z))) \rightarrow D(x, z))$
- D. $\forall x \forall y \forall z ((D(x, y) \wedge D(x, p(y, z))) \rightarrow D(x, z))$

Antwoord:

- A. Deze formule is waar: Als x deler is van y (dus als $y = kx$ voor natuurlijk getal k), en y deler is van z (dus als $z = \ell y$ voor natuurlijk getal ℓ), dan is x deler van z , want dan is $z = \ell y = \ell kx$, en omdat ℓ en k natuurlijke getallen zijn is ℓk dat ook, en geldt $x \mid z$.
- B. Deze formule is waar: Als $x \mid y$ en $y \mid x$, moeten x en y gelijk aan elkaar zijn. Dan geldt namelijk $y = kx$ en $x = \ell y$ (voor natuurlijke getallen k en ℓ), dus $y = kx = k\ell y$, dus $k\ell = 1$, en omdat k en ℓ natuurlijke getallen zijn, moet gelden $k = \ell = 1$, dus $y = kx = 1 \cdot x = x$ en $x = \ell y = 1 \cdot y = y$.
- C. Deze formule is waar: als $x \mid y$ en $x \mid (y + z)$, geldt $y = kx$ en $y + z = \ell x$ (voor natuurlijke getallen k en ℓ waarvoor bovendien geldt $\ell \geq k$). Dus $z = \ell x - y = \ell x - kx = (\ell - k)x$, en omdat k en ℓ natuurlijke getallen zijn (waarvoor geldt $\ell \geq k$), is $\ell - k$ ook een natuurlijk getal, en geldt $x \mid z$.
- D. Deze formule is onwaar: Als we $x = 2$, $y = 4$ en $z = 3$ nemen, geldt wel $2 \mid 4$ en $2 \mid (4 \cdot 3)$, maar er geldt niet $2 \mid 3$.

14. Beschouw opnieuw de taal $\mathcal{L}$ van de vorige vraag, en de structuur $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}; R_0, R_1, R_2 \rangle$ met als domein de verzameling gehele getallen $\mathbb{Z}$. De relatie R_0 is nu de verzameling paren gehele getallen (a, b) waarvoor geldt dat er een geheel getal c bestaat zodat $b = ca$. De relaties R_1 en R_2 zijn de verzamelingen van drietallen gehele getallen (a, b, c) waarvoor geldt dat $c = a \cdot b$ en $c = a + b$, respectievelijk. Welke van de bij vraag 13 genoemde formules, die in structuur $\mathcal{A}$ waar is, is in structuur $\mathcal{B}$ onwaar?

- A. A
- B. B
- C. C
- D. D

Antwoord:

- A. Formule A is ook in $\mathcal{B}$ waar.
- B. Formule B is waar in $\mathcal{A}$, maar niet waar in $\mathcal{B}$. Het is in $\mathcal{B}$ ook mogelijk dat $k = \ell = -1$: Voor $x = 2$ en $y = -2$ bijvoorbeeld, geldt wel dat $x \mid y$ (want $y = -2 = -1 \cdot 2 = -1 \cdot x$) en ook dat $y \mid x$ (want $x = 2 = -1 \cdot -2 = -1 \cdot y$), maar niet dat $x = y$, want $2 \neq -2$. In het algemeen is de implicatie onwaar voor alle getallen x en y waarvoor geldt $y = -x$.
- C. Formule C is ook in $\mathcal{B}$ waar.
- D. Formule D was in $\mathcal{A}$ niet waar.

15. Stel dat in een tak van een boom volgens de boommethode de volgende formules voorkomen.

- $$\begin{array}{ll} \vdots & \\ i. & \neg(\forall x Q(x) \vee \neg Q(b)) \\ j. & \exists x(\neg Q(x) \rightarrow Q(d)) \\ k. & \forall x(\neg Q(x) \wedge \neg Q(e)) \\ l. & \forall x(Q(c) \rightarrow \neg Q(d)) \end{array}$$

Op welke van de volgende manieren mag deze tak worden vervolgd met formule m ?

- | | | | |
|----|------|--|---------------------------|
| A. | $m.$ | $\neg \forall x Q(x) \wedge \neg Q(b)$ | $\vee$ -regel, i |
| B. | $m.$ | $\neg Q(c) \rightarrow Q(d)$ | $\rightarrow$ -regel, j |
| C. | $m.$ | $\neg Q(c) \wedge \neg Q(e)$ | $\forall$ -regel, k |
| D. | $m.$ | $\forall x(\neg Q(c) \vee \neg Q(d))$ | $\rightarrow$ -regel, l |

Antwoord:

- A. Dit mag niet, omdat er $\neg \forall x Q(x) \wedge \neg Q(b)$ zou moeten staan.
- B. Dit mag niet, omdat er een *nieuwe* naam moet worden gebruikt. Naam c komt in formule l voor. Zoals iemand tijdens het tentamen al opmerkte, is (ook) de verantwoording incorrect, dat had “ $\exists$ -regel, j ” moeten zijn.
- C. Dit mag wel. Je mag voor een universeel gekwantificeerde variabele een term substitueren, en een naam (c) is een term. Ik had hier eerst staan “ $\neg Q(x) \wedge \neg Q(e)$,” dat mag namelijk ook, want ook een variabele is een term.
- D. Dit mag niet, omdat hier de $\rightarrow$ -regel op een echte subformule wordt toegepast.

Open vragen

- Bepaal met de boommethode of de volgende redenering geldig is of niet. (1) Geef duidelijk antwoord en (2) leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de redenering niet geldig is, geef dan (3) een **tegenvoorbeeld** dat dit aantoonst (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg **duidelijk** uit (4) hoe je dit tegenvoorbeeld uit de boom hebt afgeleid, en (5) hoe dit tegenvoorbeeld aantoonst dat de redenering niet geldig is. (De vraag is dus of de gegeven formule een tautologie is.)

Redenering. $\therefore \exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y)).$

Antwoord:

- | | | | |
|-----|---|--|-------------------------|
| 1. | ✓ | $\neg \exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$ | $\neg$ -conclusie |
| 2. | ★ | $\forall x \neg(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$ | $\exists$ -regel, 1 |
| 3. | ✓ | $\neg(P(a) \rightarrow \forall yP(y))$ | $\forall$ -regel, 2 |
| 4. | ✓ | $P(a) \wedge \neg \forall yP(y)$ | $\rightarrow$ -regel, 3 |
| 5. | | $P(a)$ | $\wedge$ -regel, 4 |
| 6. | ✓ | $\neg \forall yP(y)$ | $\wedge$ -regel, 4 |
| 7. | ✓ | $\exists y \neg P(y)$ | $\forall$ -regel, 6 |
| 8. | | $\neg P(b)$ | $\exists$ -regel, 7 |
| 9. | ✓ | $\neg(P(b) \rightarrow \forall yP(y))$ | $\forall$ -regel, 2 |
| 10. | ✓ | $P(b) \wedge \neg \forall yP(y)$ | $\rightarrow$ -regel, 9 |
| 11. | | $P(b)$ | $\wedge$ -regel, 10 |

|
Sluit (8, 11)

Alle takken sluiten, dus de redenering is geldig: De formule is inderdaad een tautologie.

Merk op dat er altijd tenminste één element in het domein van een structuur moet zitten. Met een niet-leeg domein zijn er altijd twee mogelijkheden: Er zijn één of meerdere elementen in het domein die eigenschap P *niet* hebben, of die elementen zijn er *niet* (dan hebben alle elementen eigenschap P *wél*). Als ze er wel zijn, bestaat er een element in het domein dat eigenschap P niet heeft, en waarvoor dus het antecedent van de implicatie onwaar is, en dus de implicatie waar. Als ze er niet zijn, is voor alle elementen het consequent waar, en de implicatie dus ook waar.

2. Geef in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende afleiding.

Stelling. $p \wedge (q \vee r) \vdash \neg(p \wedge q) \rightarrow r$.

Antwoord:

- | | | | | | | | |
|----|--|-----------------------|--------------------|-------------|----------------------------------|-----------------------------|-------------|
| 1 | | $p \wedge (q \vee r)$ | hypothese 1 | | | | |
| 2 | | p | $\wedge$ -elim, 1 | | | | |
| 3 | | $q \vee r$ | $\wedge$ -elim, 1 | | | | |
| 4 | | | $\neg(p \wedge q)$ | hypothese 2 | | | |
| 5 | | | $q \vee r$ | rei, 3 | | | |
| 6 | | | | q | hypothese 3 | | |
| 7 | | | | | $\neg r$ | hypothese 4 | |
| 8 | | | | | p | rei, 2 | |
| 9 | | | | | q | rei, 6 | |
| 10 | | | | | $p \wedge q$ | $\wedge$ -intro, 8, 9 | |
| 11 | | | | | $\neg(p \wedge q)$ | rei, 4 | |
| 12 | | | | | $\neg \neg r$ | $\neg$ -intro, 7, 10, 11 | |
| 13 | | | | | r | $\neg$ -elim, 12 | |
| 14 | | | | | | r | hypothese 5 |
| 15 | | | | | | r | rei, 14 |
| 16 | | | | | r | $\vee$ -elim, 5, 13, 15 | |
| 17 | | | | | $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ | $\rightarrow$ -intro, 4, 16 | |

3. Bepaal of de volgende redenering geldig is. Als je denkt dat de redenering geldig is, geef dan een bewijs. Als je denkt dat de redenering niet geldig is, geef dan een tegenvoorbeeld (in de vorm van specifieke formules uit $PROP$) en **leg uit** hoe het tegenvoorbeeld duidelijk maakt dat de redenering niet geldig is.

Redenering. Voor alle formules $A, B \in PROP$ geldt: Als $A \models B$ en $\not\models B$ dan $\not\models A$.

Antwoord: Deze redenering is waar.

Bewijs. Neem willekeurige formules A en B . Stel dat $A \models B$ en dat $\not\models B$. Stel, ten behoeve van een bewijs uit het ongerijmde, dat $\models A$. Dan zijn dus alle valuaties model voor A . Maar omdat $A \models B$, zijn alle valuaties ook model voor B , dus geldt $\models B$. Maar er is gegeven dat $\not\models B$, dus we hebben een tegenspraak. Het kan dus niet zo zijn dat $\models A$, dus er geldt dat $\not\models A$. QED

Ik laat ook zien dat je de contrapositie kunt bewijzen (omdat het kan).

Bewijs. We bewijzen de contrapositie. Stel dus dat $\models A$. Te bewijzen is dat $(A \models B \text{ en } \not\models B)$ niet waar is, dus dat $A \not\models B$ of $\models B$ waar is. We bekijken nu twee mogelijkheden: B is een tautologie, of B is geen tautologie.

- Als B een tautologie is, is $\models B$ waar, en dus ook $A \not\models B$ of $\models B$ waar.
- Als B geen tautologie is, kan $A \models B$ niet waar zijn. Als dat namelijk wel zo was, zou, vanwege de aanname dat $\models A$, B wèl een tautologie zijn. Nu geldt dus dat $A \not\models B$ en dus ook dat $A \not\models B$ of $\models B$.

In beide gevallen, dus in het algemeen, geldt dus dat $A \not\models B$ of $\models B$ waar is.

QED

Antwoord: Bewijs van de stelling die genoemd wordt in de uitwerking van meerkeuzevraag 11.

Stelling. Voor alle verzamelingen A en B geldt, dat wanneer één van de verzamelingen deelverzameling van de ander is, $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$.

Bewijs. Stel dat één van de verzamelingen deelverzameling van de ander is, dus $A \subseteq B$ of $B \subseteq A$. Neem, w.l.o.g., aan, dat $A \subseteq B$. ("w.l.o.g." staat voor *without loss of generality*: er gaat niets aan algemeenheid verloren wanneer we maar één van de beide mogelijkheden onderzoeken, omdat ze identiek zijn, afgezien van het omdraaien van A en B .) Om te bewijzen dat $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$ nemen we een willekeurig element van de verzameling links, en laten we zien dat het ook in de verzameling rechts zit.

Neem een willekeurig element van $2^{A \cup B}$, zeg E . Omdat E een *element* van $2^{A \cup B}$ (de machtsverzameling van $A \cup B$) is, is E een *deelverzameling* van $A \cup B$. We moeten bewijzen dat $E \in 2^A \cup 2^B$, dus dat $E \in 2^A \vee E \in 2^B$, oftewel dat $E \subseteq A \vee E \subseteq B$.

Neem dus een willekeurige $e \in E$. Omdat $E \subseteq A \cup B$, geldt dat $e \in A \cup B$, oftewel dat $e \in A \vee e \in B$. We bekijken beide mogelijkheden. Als $e \in A$, geldt, omdat $A \subseteq B$, dat $e \in B$. Uiteraard geldt ook in de tweede mogelijkheid dat $e \in B$. Er geldt dus in het algemeen dat $e \in B$. We hebben aangetoond dat voor willekeurige $e \in E$ geldt dat $e \in B$, dus dat $E \subseteq B$, oftewel dat $E \in 2^B$. Omdat $E \in 2^B$, geldt ook dat $E \in 2^A \vee E \in 2^B$, oftewel dat $E \in 2^A \cup 2^B$. Omdat E willekeurig was gekozen uit $2^{A \cup B}$, geldt voor alle $X \in 2^{A \cup B}$ dat $X \in 2^A \cup 2^B$, oftewel dat $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$. QED