

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

9 november 2011, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor **4 punten**, en 3 open vragen in totaal goed voor **5 punten**. Gebruik deze informatie om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
 - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
 - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
 - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf als je zeker van je antwoorden bent de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
 - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
 - Vul op het MAF je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
 - Zet je **handtekening** op je MAF.
- Wat betreft de **open vragen**:
 - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
 - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven. Lever **geen kladpapier** in, dat kijk ik niet na.
 - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
 - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
 - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 4.

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de formule $F = ((p \vee q) \wedge \neg(p \rightarrow q))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

- A. $\min(\max(v(p), v(q)), 1 - \max(1 - v(p), v(q)))$.
- B. $\max(\min(v(p), v(q)), 1 - \min(v(p), 1 - v(q)))$.
- C. $\max(\min(v(p), v(q)), 1 - \min(1 - v(p), v(q)))$.
- D. $\min(\max(v(p), v(q)), 1 - \max(v(p), 1 - v(q)))$.

2. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} f(p_i) &= 1 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\ f(\neg A) &= f(A) + 1 && \text{voor } A \in PROP \\ f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 3 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

Welke waarde kent de functie f die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in $PROP$?

- A. Het aantal twee-plaatsige connectieven in de formule.
 - B. Het aantal echte subformules van de formule.
 - C. Het aantal haakjes in de formule.
 - D. De lengte van de formule.
3. Zij A en B formules uit $PROP$, waarvoor geldt dat $\models \neg A \vee \neg B$. Welke uitspraak is dan **niet** waar?
- A. $B \models \neg B \rightarrow \neg A$
 - B. $\models \neg A$ of $\models \neg B$
 - C. $\models B \rightarrow \neg A$
 - D. $A \models \neg B$
4. Zij F een formule in DNV met precies 3 disjunctieleden. Als in alle disjunctieleden complementaire literalen voorkomen, wat weten we dan van F ?
- A. F heeft geen model.
 - B. F kan één model hebben.
 - C. F kan drie modellen hebben.
 - D. Alle valuaties zijn model van F .
5. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $|\Gamma| \geq 2$ en tenminste 2 premissen contradicties zijn, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen over de redenering?
- A. De redenering is geldig.
 - B. De redenering is niet geldig.
 - C. De redenering kan geldig zijn.
 - D. Geen van bovenstaande uitspraken is waar.
6. Stel dat A en B formules in $PROP$ zijn waarvoor **niet** geldt $A \models B$. De verzamelingen valuaties die model zijn voor formules A en B noemen we M_A en M_B , respectievelijk. Als $M_B = \emptyset$, welke uitspraak is dan waar?
- A. $M_A = \emptyset$.
 - B. $M_A \neq \emptyset$.
 - C. $M_A \subseteq M_B$.
 - D. Geen van bovenstaande uitspraken is waar.

7. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle formules A en $B \in PROP$ geldt: als $A \models B$, dan $\models \neg A$ of $\models B$.

Deze redenering is niet geldig. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

- A. $A = p \vee \neg p$ en $B = p$.
- B. $A = p \wedge \neg p$ en $B = \neg p$.
- C. $A = p$ en $B = p \vee \neg p$.
- D. $A = p \vee p$ en $B = p$.

8. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$ die **niet geldig** is. Beschouw twee formules uit $PROP$: een tautologie T en een contradictie D . Welke uitspraak is zeker waar?

- A. De redenering $\Gamma \therefore (C \vee T)$ is geldig.
- B. De redenering $\Gamma \therefore (C \wedge T)$ is geldig.
- C. De redenering $\Gamma \therefore (C \vee D)$ is geldig.
- D. De redenering $\Gamma \therefore (C \wedge D)$ is geldig.

9. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle verzamelingen A , B en C geldt: als $A \subseteq (B \cup C)$, dan $(B \cap C)^c \subseteq A^c$.

De redenering is niet logisch geldig. Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld? (Neem steeds aan dat er geen andere objecten in het universum bestaan dan de elementen van A , B en C .)

- A. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2\}$.
- B. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0, 1, 2\}$.
- C. $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1, 2\}$.
- D. $A = \emptyset$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 1\}$.

10. Welke uitspraak is **niet** waar?

- A. $(ATOM - FORM) \subseteq VAR$
- B. $(VAR \cap GTERM) \subseteq ZIN$
- C. $(ZIN - ATOM) \subseteq LIT$
- D. $(ATOM \cap ZIN) \subseteq LIT$

11. Zij A , B en C verzamelingen waarvoor geldt dat $C \subseteq (A \cap B)^c$. Welke uitspraak is waar?

- A. $A \cap C \subseteq B^c$
- B. $B - A \subseteq C^c$
- C. $A \subseteq (B \cup C)^c$
- D. $C - (A \cup B) = \emptyset$

12. Beschouw de verzameling $B = TERM - (VAR \cup GTERM)$. Welke van de volgende expressies zit in deze verzameling?

- A. c_0
- B. x_0
- C. $f_0(c_0)$
- D. $f_0(x_0)$

13. Zij T een eerste-ordetaal met twee 2-plaatsige predicaatsymbolen K en G . Beschouw de volgende twee structuren voor deze taal, $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; <, > \rangle$ en $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}; <, > \rangle$. Hierin zijn $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ de verzamelingen natuurlijke en gehele getallen, respectievelijk, en zijn $<$ en $>$ de 'kleiner dan' en 'groter dan' relaties, respectievelijk. In beide structuren is de denotatie van predicaatsymbool K de relatie $<$ en de denotatie van predicaatsymbool G de relatie $>$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

- A. $\exists x \forall y K(y, x)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.
 - B. $\exists x \forall y G(y, x)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.
 - C. $\forall x \exists y G(x, y)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.
 - D. $\forall x \exists y K(x, y)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.
14. Beschouw opnieuw de taal T van de vorige vraag, en de structuren $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N}; \leq, \geq \rangle$ en $\mathcal{D} = \langle \mathbb{Z}; \leq, \geq \rangle$. Hierin zijn $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ als voorheen, en zijn $\leq$ en $\geq$ de relaties 'kleiner dan of gelijk aan' en 'groter dan of gelijk aan,' respectievelijk. In beide structuren is de denotatie van predicaatsymbool K de relatie $\leq$ en de denotatie van predicaatsymbool G de relatie $\geq$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

- A. $\exists x \forall y K(y, x)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.
 - B. $\exists x \forall y G(y, x)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.
 - C. $\forall x \exists y G(x, y)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.
 - D. $\forall x \exists y K(x, y)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.
15. Drie logici lopen de /Pub (een kroeg) binnen en gaan aan een tafeltje zitten. Een vriendelijke student komt langs en vraagt of ze allemaal bier willen drinken. De eerste zegt "Ik weet het niet." Dan zegt de tweede "Ik weet het niet." Dan zegt de derde "Nee." Welke bestelling is consistent met deze gebeurtenissen?
- A. De eerste krijgt koffie, de tweede krijgt koffie, de derde krijgt koffie.
 - B. De eerste krijgt koffie, de tweede krijgt koffie, de derde krijgt bier.
 - C. De eerste krijgt bier, de tweede krijgt bier, de derde krijgt koffie.
 - D. De eerste krijgt bier, de tweede krijgt bier, de derde krijgt bier.

Open vragen

1. (10 punten) Boommethode

Beantwoord met behulp van de boommethode de vraag of de volgende redenering geldig is of niet. (1) Geef duidelijk antwoord ("De redenering is [wel/niet] geldig.") en (2) leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de redenering niet geldig is, geef dan (3) een **tegenvoorbeeld** dat dit aantoont (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg **duidelijk** uit (4) hoe je dit tegenvoorbeeld uit de boom hebt afgeleid, en (5) hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de redenering niet geldig is.

Redenering. $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg \exists z(R(x, z) \wedge P(z))) \therefore P(a) \vee P(b)$.

2. (10 punten) Fitch

Bewijs in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende stelling.

Stelling. $\neg p \vee (q \rightarrow r) \vdash \neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$.

Hint: Er is een afleiding van 18 formules. Begin alle stappen op te schrijven die door de vorm van de redenering en de formules worden gedicteerd. Kijk ook goed naar de vorm van de premisse, en bedenk hoe je daar gebruik van kunt maken.

3. (10 punten) **Structurele Inductie**

- (a) Geef een recursieve definitie van de formule $s : PROP \rightarrow \mathbb{N}$, die aan elke formule F in $PROP$ het aantal subformules van F toekent. Als identieke subformules vaker voorkomen, moet je functie ze ook vaker tellen—zoals steeds, moet je functie dus eigenlijk het aantal *voorkomens* van subformules van F geven.

Tip: Controleer met een aantal formules waarvan je eerst met de hand het aantal subformules bepaalt, of je functie het juiste aantal geeft. De formule $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_0))$ bijvoorbeeld, heeft als subformules de formule $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_0))$ zelf, en daarnaast p_0 , $(p_1 \vee p_0)$, p_1 en p_0 . Je functie moet beide keren dat p_0 voorkomt afzonderlijk tellen, en voor deze formule dus als antwoord 5 geven.

- (b) De functies $p : PROP \rightarrow \mathbb{N}$ en $c : PROP \rightarrow \mathbb{N}$, die aan elke formule in $PROP$ het aantal voorkomens van propositievariabelen, en het aantal voorkomens van connectieven toekennen, respectievelijk, zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{array}{lll} p(p_i) = 1 & c(p_i) = 0 & i \in \mathbb{N} \\ p(\neg A) = p(A) & c(\neg A) = c(A) + 1 & \text{voor alle } A \in PROP \\ p((A \star B)) = p(A) + p(B) & c((A \star B)) = c(A) + c(B) + 1 & \text{voor alle } A, B \in PROP \end{array}$$

Bewijs met structurele inductie de volgende stelling:

Stelling. Voor alle formules $F \in PROP$ geldt: $s(F) = p(F) + c(F)$.