

Tentamen TI1300: Redeneren en Logica

9 november 2011, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT!

- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor **4 punten**, en 3 open vragen in totaal goed voor **5 punten**. Gebruik deze informatie om je tijd verstandig te verdelen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Wat betreft de **meerkeuzevragen**:
 - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
 - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
 - Markeer je antwoorden **eerst** op dit tentamen en schrijf als je zeker van je antwoorden bent de antwoorden over op het meerkeuze-antwoordformulier (MAF).
 - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het MAF **niet altijd A-B-C-D** is!
 - Vul op het MAF je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
 - Zet je **handtekening** op je MAF.
- Wat betreft de **open vragen**:
 - Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar**.
 - Zorg, als je kladpapier gebruikt, voor voldoende tijd om je antwoord over te schrijven. Lever **geen kladpapier** in, dat kijk ik niet na.
 - Lees elke vraag goed door en geef **alle informatie** waar om gevraagd wordt.
 - **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
 - Controleer voordat je je antwoorden inlevert, of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 9.

Meerkeuzevragen

1. Beschouw de formule $F = ((p \vee q) \wedge \neg(p \rightarrow q))$. Welke van de volgende expressies drukt de waarheidswaarde van deze formule uit als functie van de waarheidswaarden van de erin voorkomende propositievariabelen?

- A. $\min(\max(v(p), v(q)), 1 - \max(1 - v(p), v(q)))$.
- B. $\max(\min(v(p), v(q)), 1 - \min(v(p), 1 - v(q)))$.
- C. $\max(\min(v(p), v(q)), 1 - \min(1 - v(p), v(q)))$.
- D. $\min(\max(v(p), v(q)), 1 - \max(v(p), 1 - v(q)))$.

Antwoord: Dit moet je gewoon opschrijven met je kennis van waarheidsfuncties, en dan checken welk antwoord met jouw antwoord correspondeert.

2. Beschouw het volgende stelsel recurrente betrekkingen met randvoorwaarde:

$$\begin{aligned} f(p_i) &= 1 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\ f(\neg A) &= f(A) + 1 && \text{voor } A \in PROP \\ f((A \star B)) &= f(A) + f(B) + 3 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

Welke waarde kent de functie f die door dit stelsel wordt gedefinieerd toe aan elke formule in $PROP$?

- A. Het aantal twee-plaatsige connectieven in de formule.
- B. Het aantal echte subformules van de formule.
- C. Het aantal haakjes in de formule.
- D. **De lengte van de formule.**

Antwoord: Het antwoord is de lengte van de formule: een propositievariabele heeft lengte 1, voor een $\neg$ komt er 1 bij ($f(\neg A) = f(A) + 1$) en voor een twee-plaatsig connectief komt er 3 bij: 2 haakjes, plus het twee-plaatsige connectief.

3. Zij A en B formules uit $PROP$, waarvoor geldt dat $\models \neg A \vee \neg B$. Welke uitspraak is dan **niet** waar?

- A. $B \models \neg B \rightarrow \neg A$
- B. $\models \neg A$ of $\models \neg B$
- C. $\models B \rightarrow \neg A$
- D. $A \models \neg B$

Antwoord: antwoord

- A. Deze uitspraak is waar voor *alle* A en B , ongeacht of $\models \neg A \vee \neg B$ waar is.
- B. Dit is niet waar. Als namelijk $A = p$ en $B = \neg p$, is $\neg A \vee \neg B = \neg p \vee \neg \neg p \equiv \neg p \vee p$ en dat is een tautologie. Maar $\neg A$ noch $\neg B$ is een tautologie.
- C. Omdat $\neg A \vee \neg B \equiv A \rightarrow \neg B \equiv B \rightarrow \neg A$, geldt als $\models \neg A \vee \neg B$ ook $\models B \rightarrow \neg A$.
- D. Dat geldt dus, als $\models \neg A \vee \neg B$, ook dat $\models A \rightarrow \neg B$, en dus dat $A \models \neg B$.

4. Zij F een formule in DNV met precies 3 disjunctieleden. Als in alle disjunctieleden complementaire literalen voorkomen, wat weten we dan van F ?

- A. F heeft geen model.
- B. F kan één model hebben.
- C. F kan drie modellen hebben.
- D. Alle valuaties zijn model van F .

Antwoord: Omdat in alle disjunctieleden complementaire literalen voorkomen, zijn alle disjunctieleden onvervulbaar. Het zijn namelijk stuk voor stuk conjuncties, en een conjunctie met complementaire literalen is niet vervulbaar (denk aan $p \wedge \neg p$). De gehele disjunctie F is dan zelf ook onvervulbaar, en heeft dus geen model: antwoord A is correct.

5. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $|\Gamma| \geq 2$ en tenminste 2 premissen contradicties zijn, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen over de redenering?

- A. De redenering is geldig.
- B. De redenering is niet geldig.
- C. De redenering kan geldig zijn.
- D. Geen van bovenstaande uitspraken is waar.

Antwoord: De redenering heeft tenminste 2 premissen die contradictie zijn, dus een tegenvoorbeeld is niet mogelijk. De redenering is dus geldig.

6. Stel dat A en B formules in $PROP$ zijn waarvoor **niet** geldt $A \models B$. De verzamelingen valuaties die model zijn voor formules A en B noemen we M_A en M_B , respectievelijk. Als $M_B = \emptyset$, welke uitspraak is dan waar?

- A. $M_A = \emptyset$.
- B. $M_A \neq \emptyset$.
- C. $M_A \subseteq M_B$.
- D. Geen van bovenstaande uitspraken is waar.

Antwoord: Omdat **niet** geldt dat $A \models B$, moet er een valuatie zijn die model is voor A maar niet voor B . M_A is dus niet de lege verzameling, dus $M_A \neq \emptyset$ is het correcte antwoord. Er geldt dus ook niet dat $M_A \subseteq M_B$, want genoemde valuatie zit in M_A en niet in M_B .

7. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle formules A en $B \in PROP$ geldt: als $A \models B$, dan $\models \neg A$ of $\models B$.

Deze redenering is niet geldig. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

- A. $A = p \vee \neg p$ en $B = p$.
- B. $A = p \wedge \neg p$ en $B = \neg p$.
- C. $A = p$ en $B = p \vee \neg p$.
- D. $A = p \vee p$ en $B = p$.

Antwoord: Om een geschikt tegenvoorbeeld te zijn, moet voor formules A en B gelden dat $A \models B$ wèl waar is, maar " $\models \neg A$ of $\models B$ " niet waar is. Dat laatste betekent dat $\neg A$ noch B een tautologie mag zijn.

- A. Dit is geen tegenvoorbeeld omdat hier B niet uit A volgt.
- B. Dit is geen tegenvoorbeeld omdat hier B weliswaar uit A volgt, maar $\neg A$ wèl een tautologie is.
- C. Dit is geen tegenvoorbeeld omdat hier B weliswaar uit A volgt, maar B wèl een tautologie is.
- D. Dit is wel een tegenvoorbeeld: B volgt uit A , maar $\neg A$ noch B is een tautologie.

8. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$ die **niet geldig** is. Beschouw twee formules uit $PROP$: een tautologie T en een contradictie D . Welke uitspraak is zeker waar?

- A. De redenering $\Gamma \therefore (C \vee T)$ is geldig.
- B. De redenering $\Gamma \therefore (C \wedge T)$ is geldig.
- C. De redenering $\Gamma \therefore (C \vee D)$ is geldig.
- D. De redenering $\Gamma \therefore (C \wedge D)$ is geldig.

Antwoord: De redenering was ongeldig, dus er was tenminste één valuatie die de premissen waar maakte, en de conclusie onwaar.

- A. De redenering $\Gamma \therefore (C \vee T)$ is geldig. Er bestaat geen valuatie die $(C \vee T)$ onwaar maakt, dus een tegenvoorbeeld kan niet bestaan.
- B. Als de redenering $\Gamma \therefore C$ niet geldig is, is de redenering $\Gamma \therefore (C \wedge T)$ ook ongeldig. Een valuatie die alle premissen in Γ waar maakt en de conclusie C onwaar, maakt ook $(C \wedge T)$ onwaar.
- C. Als de redenering $\Gamma \therefore C$ niet geldig is, is de redenering $\Gamma \therefore (C \vee D)$ ook ongeldig. Een valuatie die alle premissen in Γ waar maakt en de conclusie C onwaar, maakt ook $(C \vee D)$ onwaar.
- D. Als de redenering $\Gamma \therefore C$ niet geldig is, is de redenering $\Gamma \therefore (C \wedge D)$ ook ongeldig. Een valuatie die alle premissen in Γ waar maakt en de conclusie C onwaar, maakt ook $(C \wedge D)$ onwaar.

9. Beschouw de volgende redenering.

Redenering. Voor alle verzamelingen A , B en C geldt: als $A \subseteq (B \cup C)$, dan $(B \cap C)^c \subseteq A^c$.

De redenering is niet logisch geldig. Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld? (Neem steeds aan dat er geen andere objecten in het universum bestaan dan de elementen van A , B en C .)

- A. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2\}$.
- B. $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{0, 1, 2\}$.
- C. $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1, 2\}$.
- D. $A = \emptyset$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 1\}$.

Antwoord: Om het antecedent waar te maken moeten alle elementen in A ook in B of in C zitten, en om het consequent onwaar te maken moet er een object bestaan dat wel in $(B \cap C)^c$ zit (dus niet in $(B \cap C)$), maar niet in A^c (dus wèl in A). In het tegenvoorbeeld moeten dus alle elementen van

A in B of in C zitten, en moet er een element in A bestaan, dat niet in B én C zit (dus niet in B of niet in C).

- A. Voor deze verzamelingen is het antecedent niet waar, dus de implicatie *wel* waar. Niet alle elementen van A zitten in B of in C , object 0 namelijk niet.
- B. Hier geldt *wél* het antecedent, maar is ook het consequent waar. Er is namelijk geen element van A dat niet in B en C zit.
- C. Hier is het antecedent waar, want $\{0, 1\} \subseteq \{0, 1, 2\}$. Er bestaat ook een object in A dat niet in B en C zit, namelijk 0. Dit is dus het gevraagde tegenvoorbeeld.
- D. Er moet in het tegenvoorbeeld een element in A zitten. Dat is hier niet het geval, dus deze verzamelingen vormen geen tegenvoorbeeld.

10. Welke uitspraak is **niet** waar?

- A. $(ATOM - FORM) \subseteq VAR$
- B. $(VAR \cap GTERM) \subseteq ZIN$
- C. $(ZIN - ATOM) \subseteq LIT$
- D. $(ATOM \cap ZIN) \subseteq LIT$

Antwoord:

- A. $(ATOM - FORM)$ is de lege verzameling, want hij bevat alle atomen die geen formule zijn. Maar alle atomen zijn *wél* formules, dus is deze verzameling leeg. De lege verzameling is deelverzameling van alle verzamelingen, dus ook van VAR .
- B. $(VAR \cap GTERM)$ is de lege verzameling, want een term kan niet tegelijkertijd een variabele en een gesloten term (zonder vrije variabelen) zijn. De lege verzameling is deelverzameling van elke verzameling, dus ook van ZIN .
- C. $(ZIN - ATOM)$ is de verzameling formules zonder vrije variabelen die geen atoom zijn. Dit kunnen literalen zijn (bijvoorbeeld $\neg P_0(c_1)$), maar het hoeft niet. De formule $\forall x_0 P_8(x_0)$ bijvoorbeeld, is een formule zonder vrije variabelen, en het is geen atoom. Maar het is ook geen literaal, dus deze uitspraak is onwaar.
- D. $(ATOM \cap ZIN)$ is de verzameling atomen zonder vrije variabelen, bijvoorbeeld $P_7(c_3)$. Al deze formules zijn ook literalen, want alle atomen zijn literalen.

11. Zij A , B en C verzamelingen waarvoor geldt dat $C \subseteq (A \cap B)^c$. Welke uitspraak is waar?

- A. $A \cap C \subseteq B^c$
- B. $B - A \subseteq C^c$
- C. $A \subseteq (B \cup C)^c$
- D. $C - (A \cup B) = \emptyset$

Antwoord: Een Venn diagram voor de premisse heeft verzamelingen A en B met een overlap, dat is $A \cap B$. C ligt in het complement daarvan, dus deels in A (maar niet in B), deels in B (maar niet in A), en deels buiten A en B .

- A. De doorsnede van A en C ligt zeker buiten B , want anders zouden er objecten in A en in B inzitten, en die liggen buiten C . Dit is dus het goede antwoord.
- B. $B - A$ is de verzameling objecten die in B zitten maar niet in A . Ik heb net uitgelegd dat elementen

van C daar ook in kunnen zitten, dus $B - A$ is geen deelverzameling van C^c .

- C. $B \cup C$ is de verzameling objecten die in B of C zitten. Er kunnen objecten in die verzameling (zowel elementen van B als van C) ook in A zitten, dus A is geen deelverzameling van het complement van $B \cup C$.
- D. $A \cup B$ is de vereniging van A en B . Er kunnen best objecten in C zitten die niet in A of B zitten, dus deze verzameling hoeft niet leeg te zijn.

12. Beschouw de verzameling $B = \text{TERM} - (\text{VAR} \cup \text{GTERM})$. Welke van de volgende expressies zit in deze verzameling?

- A. c_0
 B. x_0
 C. $f_0(c_0)$
 D. $f_0(x_0)$

Antwoord: Neem een element uit B , zeg $x \in \text{TERM} - (\text{VAR} \cup \text{GTERM})$. Dan geldt

$$\begin{aligned} x \in \text{TERM} - (\text{VAR} \cup \text{GTERM}) &\Leftrightarrow x \in \text{TERM} \wedge \neg(x \in (\text{VAR} \cup \text{GTERM})) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{TERM} \wedge \neg(x \in \text{VAR} \vee x \in \text{GTERM}) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{TERM} \wedge (\neg(x \in \text{VAR}) \wedge \neg(x \in \text{GTERM})) \\ &\Leftrightarrow x \in \text{TERM} \wedge x \notin \text{VAR} \wedge x \notin \text{GTERM}. \end{aligned}$$

Dus B bevat termen, die niet in VAR en ook niet in GTERM zitten. Dus het zijn geen variabelen (B is fout), en geen termen zonder vrije variabelen (zoals namen, en functies van namen), dus A en C zijn fout. Het kunnen dus alleen functiesymbolen met vrije variabelen zijn, zoals $f_0(x_0)$, waar x_0 een variabele, en f_0 een 1-plaatsig functiesymbool is.

13. Zij T een eerste-ordetaal met twee 2-plaatsige predicaatsymbolen K en G . Beschouw de volgende twee structuren voor deze taal, $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; <, > \rangle$ en $\mathcal{B} = \langle \mathbb{Z}; <, > \rangle$. Hierin zijn $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ de verzamelingen natuurlijke en gehele getallen, respectievelijk, en zijn $<$ en $>$ de 'kleiner dan' en 'groter dan' relaties, respectievelijk. In beide structuren is de denotatie van predicaatsymbool K de relatie $<$ en de denotatie van predicaatsymbool G de relatie $>$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

- A. $\exists x \forall y K(y, x)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.
 B. $\exists x \forall y G(y, x)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.
 C. $\forall x \exists y G(x, y)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.
 D. $\forall x \exists y K(x, y)$ is onwaar in $\mathcal{A}$ en waar in $\mathcal{B}$.

Antwoord: Het is handig voor alle formules te bepalen of ze waar zijn in structuren $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Daarna lees je het goede antwoord zo af uit de tabel.

Formule (en een equivalente)	$\mathcal{A} (\mathbb{N})$	$\mathcal{B} (\mathbb{Z})$
$\exists x \forall y G(x, y) (\exists x \forall y K(y, x))$	onwaar	onwaar
$\exists x \forall y G(y, x) (\exists x \forall y K(x, y))$	onwaar	onwaar
$\forall x \exists y G(x, y) (\forall x \exists y K(y, x))$	onwaar	waar
$\forall x \exists y G(y, x) (\forall x \exists y K(x, y))$	waar	waar

14. Beschouw opnieuw de taal T van de vorige vraag, en de structuren $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N}; \leq, \geq \rangle$ en $\mathcal{D} = \langle \mathbb{Z}; \leq, \geq \rangle$. Hierin zijn $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$ als voorheen, en zijn $\leq$ en $\geq$ de relaties 'kleiner dan of gelijk aan' en 'groter dan of gelijk aan,' respectievelijk. In beide structuren is de denotatie van predicaatsymbool K de relatie $\leq$ en de denotatie van predicaatsymbool G de relatie $\geq$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

- A. $\exists x \forall y K(y, x)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.
- B. $\exists x \forall y G(y, x)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.**
- C. $\forall x \exists y G(x, y)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.
- D. $\forall x \exists y K(x, y)$ is waar in $\mathcal{C}$ en onwaar in $\mathcal{D}$.

Antwoord: Het is handig voor alle formules te bepalen of ze waar zijn in structuren $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$. Daarna lees je het goede antwoord zo af uit de tabel.

Formule (en een equivalente)	$\mathcal{C} (\mathbb{N})$	$\mathcal{D} (\mathbb{Z})$
$\exists x \forall y G(x, y) (\exists x \forall y K(y, x))$	onwaar	onwaar
$\exists x \forall y G(y, x) (\exists x \forall y K(x, y))$	waar	onwaar
$\forall x \exists y G(x, y) (\forall x \exists y K(y, x))$	waar	waar
$\forall x \exists y G(y, x) (\forall x \exists y K(x, y))$	waar	waar

15. Drie logici lopen de /Pub (een kroeg) binnen en gaan aan een tafeltje zitten. Een vriendelijke student komt langs en vraagt of ze allemaal bier willen drinken. De eerste zegt "Ik weet het niet." Dan zegt de tweede "Ik weet het niet." Dan zegt de derde "Nee." Welke bestelling is consistent met deze gebeurtenissen?

- A. De eerste krijgt koffie, de tweede krijgt koffie, de derde krijgt koffie.
- B. De eerste krijgt koffie, de tweede krijgt koffie, de derde krijgt bier.
- C. De eerste krijgt bier, de tweede krijgt bier, de derde krijgt koffie.**
- D. De eerste krijgt bier, de tweede krijgt bier, de derde krijgt bier.

Antwoord: Als de eerste geen bier had gewild, had hij geweten dat ze *niet* allemaal bier wilden drinken (ongeacht wat de anderen zouden willen drinken), en het antwoord "nee" zou zijn geweest. Hij zegt "Ik weet het niet," en dus wil hij wél bier. Zo ook voor de tweede, dus de eerste twee willen allebei bier. Als de derde ook bier had gewild, had hij ondertussen geweten dat ze allemaal bier wilden, en had hij "ja" gezegd. Maar hij zegt "nee" en wil dus geen bier. Antwoord C is dus correct. Dit hebben de eerstejaars in de /Pub dan ook haarfijn aan Peter Pul duidelijk gemaakt toen deze vriendelijke student zostraks onze bestelling kwam opnemen.

Open vragen

1. (10 punten) Boommethode

Beantwoord met behulp van de boommethode de vraag of de volgende redenering geldig is of niet. (1) Geef duidelijk antwoord ("De redenering is [wel/niet] geldig.") en (2) leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de redenering niet geldig is, geef dan (3) een **tegenvoorbeeld** dat dit aantoont (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg **duidelijk** uit (4) hoe je dit tegenvoorbeeld uit de boom hebt afgeleid, en (5) hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de redenering niet geldig is.

Redenering. $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y)), \forall x(P(x) \rightarrow \neg \exists z(R(x, z) \wedge P(z))) \therefore P(a) \vee P(b)$.

Antwoord: De redenering is niet geldig. Het is bij het construeren van deze boom belangrijk om bij het substitueren van een naam voor x in de eerste premisse een **nieuwe naam** te kiezen, bijvoorbeeld c (omdat a en b al in de conclusie zijn gebruikt). Daarna moet je voor y in de eerste premisse een **nieuwe naam** invullen, bijvoorbeeld d . Nu weet je dat $P(c)$ waar is, en $R(c, d)$ ook. Daarna kun je c ook invullen voor de x in de tweede premisse, zodat je kunt afleiden dat er geen z mag bestaan waarvoor (oftewel, dat voor alle z niet) geldt dat $R(c, z) \wedge P(z)$ waar is. Wanneer we voor z ook d invullen, blijkt dat de boom niet sluit, en moeten we een tegenvoorbeeld construeren waarin de volgende formules waar zijn:

- $\forall x(P(x) \rightarrow \neg \exists z(R(x, z) \wedge P(z)))$
- $P(c)$
- $R(c, d)$
- $\neg P(d)$
- $\neg P(a)$
- $\neg P(b)$

Een structuur waarin al deze formules waar zijn is de volgende: $\mathcal{A} = \langle D; R_0, R_1 \rangle$, waar

$$D = \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$$

$$R_0 = \{d_2\}$$

$$R_1 = \{(d_2, d_3)\}$$

De denotaties zijn: $P^{\mathcal{A}} = R_0$, $R^{\mathcal{A}} = R_1$, $a^{\mathcal{A}} = d_0$, $b^{\mathcal{A}} = d_1$, $c^{\mathcal{A}} = d_2$, en $d^{\mathcal{A}} = d_3$.

De eerste premisse is waar in deze structuur omdat er in het domein van de structuur een object bestaat (namelijk d_2) waarvoor geldt dat het in $P^{\mathcal{A}}$ zit, en waarvoor een object bestaat (namelijk d_3) waarmee het in relatie $R^{\mathcal{A}}$ zit. De tweede premisse is waar omdat voor alle objecten in het domein geldt dat als ze in $P^{\mathcal{A}}$ zitten (dit is alleen waar voor d_2), er geen object bestaat waar het mee in relatie $R^{\mathcal{A}}$ zit en dat in $P^{\mathcal{A}}$ zit. Object d_2 zit namelijk in $P^{\mathcal{A}}$, en er bestaat een object waarmee d_2 in relatie $R^{\mathcal{A}}$ zit, maar dat object (d_3) zit niet in $P^{\mathcal{A}}$. De conclusie is onwaar, omdat $a^{\mathcal{A}}$ noch $b^{\mathcal{A}}$ in $P^{\mathcal{A}}$ zit.

2. (10 punten) **Fitch**

Bewijs in het **niet-uitgebreide** systeem voor natuurlijke deductie van Fitch de volgende stelling.

Stelling. $\neg p \vee (q \rightarrow r) \vdash \neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$.

Hint: Er is een afleiding van 18 formules. Begin alle stappen op te schrijven die door de vorm van de redenering en de formules worden gedicteerd. Kijk ook goed naar de vorm van de premisse, en bedenk hoe je daar gebruik van kunt maken.

Antwoord:

1	$\neg p \vee (q \rightarrow r)$	hypothese 1
2	$\neg r$	hypothese 2
3	p	hypothese 3
4	$\neg p \vee (q \rightarrow r)$	rei, 1
5	$\neg p$	hypothese 4
6	q	hypothese 5
7	p	rei, 3
8	$\neg p$	rei, 5
9	$\neg q$	$\neg$ -intro, 6, 7, 8
10	$q \rightarrow r$	hypothese 6
11	q	hypothese 7
12	$q \rightarrow r$	rei, 10
13	r	$\rightarrow$ -elim, 11, 12
14	$\neg r$	rei, 2
15	$\neg q$	$\neg$ -intro, 11, 13, 14
16	$\neg q$	$\vee$ -elim, 4, 9, 15
17	$p \rightarrow \neg q$	$\rightarrow$ -intro, 3, 16
18	$\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$	$\rightarrow$ -intro, 2, 17

3. (10 punten) **Structurele Inductie**

- (a) Geef een recursieve definitie van de formule $s : PROP \rightarrow \mathbb{N}$, die aan elke formule F in $PROP$ het aantal subformules van F toekent. Als identieke subformules vaker voorkomen, moet je functie ze ook vaker tellen—zoals steeds, moet je functie dus eigenlijk het aantal *voorkomens* van subformules van F geven.

Tip: Controleer met een aantal formules waarvan je eerst met de hand het aantal subformules bepaalt, of je functie het juiste aantal geeft. De formule $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_0))$ bijvoorbeeld, heeft als subformules de formule $(p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_0))$ zelf, en daarnaast p_0 , $(p_1 \vee p_0)$, p_1 en p_0 . Je functie moet beide keren dat p_0 voorkomt afzonderlijk tellen, en voor deze formule dus als antwoord 5 geven.

Antwoord: Aantal subformules:

$$\begin{aligned}
 s(p_i) &= 1 && \text{voor elke } i \in \mathbb{N} \\
 s(\neg A) &= s(A) + 1 && \text{voor } A \in PROP \\
 s((A \star B)) &= s(A) + s(B) + 1 && \text{voor } A, B \in PROP \text{ en } \star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}
 \end{aligned}$$

Voor de voorbeeldformule $F = (p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_0))$:

$$\begin{aligned}
 s((p_0 \rightarrow (p_1 \vee p_0))) &= s(p_0) + s((p_1 \vee p_0)) + 1 \\
 &= s(p_0) + s(p_1) + s(p_0) + 1 + 1 \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 &= 5, \text{ zoals gewenst.}
 \end{aligned}$$

- (b) De functies $p : PROP \rightarrow \mathbb{N}$ en $c : PROP \rightarrow \mathbb{N}$, die aan elke formule in $PROP$ het aantal voorkomens van propositievariabelen, en het aantal voorkomens van connectieven toekennen, respectievelijk, zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} p(p_i) &= 1 & c(p_i) &= 0 & i &\in \mathbb{N} \\ p(\neg A) &= p(A) & c(\neg A) &= c(A) + 1 & \text{voor alle } A \in PROP \\ p((A \star B)) &= p(A) + p(B) & c((A \star B)) &= c(A) + c(B) + 1 & \text{voor alle } A, B \in PROP \end{aligned}$$

Bewijs met structurele inductie de volgende stelling:

Stelling. Voor alle formules $F \in PROP$ geldt: $s(F) = p(F) + c(F)$.

Antwoord: We moeten bewijzen dat alle formules F in $PROP$ de eigenschap hebben dat $s(F) = p(F) + c(F)$. Deze eigenschap duiden we aan met het éénplaatsige predicaat E , dat dus waar is als het argument deze eigenschap heeft.

Bewijs.

Basis ($F = p_i$): Voor formules van de vorm p_i geldt eigenschap E , omdat

$$s(p_i) = 1 = 1 + 0 = p(p_i) + 0 = p(p_i) + c(p_i).$$

Inductiestap: Nu moeten we bewijzen dat de beide manieren waarmee we complexere formules kunnen construeren uit eenvoudiger formules, de eigenschap intact laten. We moeten bewijzen dat, als formules A en B eigenschap E hebben, ook formules $\neg A$ en $(A \star B)$ eigenschap E hebben (waar $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$). Stel dus dat A en B eigenschap E hebben, dus dat $s(A) = p(A) + c(A)$ en dat $s(B) = p(B) + c(B)$ (dit zijn de inductiehypothesen).

$F = \neg A$: Voor formules van de vorm $F = \neg A$ geldt:

$$\begin{aligned} s(\neg A) &= s(A) + 1 && \text{volgens de definitie van de functie } s \\ &= p(A) + c(A) + 1 && \text{volgens de inductiehypothese} \\ &= p(\neg A) + c(A) + 1 && \text{volgens de definitie van de functie } p \\ &= p(\neg A) + c(\neg A) && \text{volgens de definitie van de functie } c \end{aligned}$$

Dus wanneer we vóór een formule A die eigenschap E heeft een $\neg$ plaatsen, geldt eigenschap E ook voor de nieuwe formule $\neg A$.

$F = (A \star B)$: Hier laten we zien dat eigenschap E geldt voor formules van de vorm $(A \star B)$, wanneer hij geldt voor formules A en B .

$$\begin{aligned} s((A \star B)) &= s(A) + s(B) + 1 && \text{volgens de definitie van de functie } s \\ &= p(A) + c(A) + s(B) + 1 && \text{volgens de inductiehypothese (A)} \\ &= p(A) + c(A) + p(B) + c(B) + 1 && \text{volgens de inductiehypothese (B)} \\ &= p((A \star B)) + c(A) + c(B) + 1 && \text{volgens de definitie van de functie } p \\ &= p((A \star B)) + c((A \star B)) && \text{volgens de definitie van de functie } c \end{aligned}$$

Dus ook wanneer we uit formules A en B een nieuwe formule van de vorm $(A \star B)$ construeren, blijft eigenschap E behouden.

Volgens het principe van inductie, geldt eigenschap E dus voor alle formules $F \in PROP$. QED