TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen TI1300 en IN1305-A
(Redeneren en) Logica

5 november 2010, 9.00–12.00 uur

LEES DEZE OPMERKINGEN AANDACHTIG DOOR VOORDAT JE BEGINT

- Vul duidelijk de **vakcode** in van je tentamen (IN1305-A of TI1300), zowel op het meerkeuzeformulier als op je antwoordvel van de open vragen.
- Dit tentamen bestaat uit 15 meerkeuzevragen in totaal goed voor 3 punten, en 5 open vragen in totaal goed voor 6 punten. (Je krijgt 1 punt kado.)

IN1305-A Maak je tentamen **IN1305-A**, beantwoord dan **alle meerkeuzevragen**, plus **open vragen 1 t/m 5**.

TI1300 Maak je tentamen **TI1300**, beantwoord dan **alle meerkeuzevragen**, plus **open vragen 2 t/m 6**.

- Wat betreft de meerkeuzevragen:
  - Er is voor iedere vraag maar één goed antwoord.
  - **Let op** dat de volgorde van de antwoorden op het antwoordformulier niet altijd A-B-C-D is!
  - Alle meerkeuzevragen tellen even zwaar.
  - Vul op het antwoordformulier je studienummer zowel met cijfers in als met blokjes.
  - Probeer max. 1 uur aan de meerkeuzevragen te besteden, de rest heb je nodig voor de open vragen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of andere bronnen is tijdens dit tentamen **niet toegestaan**.
- Formuleer je antwoord in correct Nederlands of Engels en **schrijf leesbaar** (**gebruik eerst kladpapier**).
- **Beargumenteer je antwoord altijd volledig**: laat niets aan mijn interpretatie over.
- Voordat je je antwoorden inlevert, controleer of op ieder blaadje je naam en studienummer staat en geef het aantal ingeleverde bladen aan op (tenminste) de eerste pagina.
- Totaal aantal pagina's (exclusief dit titelblad): 3.

Meerkeuzevragen

1. Stel dat formules $A, B \in PROP$ dusdanig zijn dat $A \models B$ geldt. Zij M_A de verzameling valuaties die model zijn voor A en M_B de verzameling valuaties die model zijn voor B. Wat kunnen we nu zeggen over de relatie tussen M_A en M_B?
   - A. $M_A = M_B$.
   - B. $M_A \subseteq M_B$.
   - C. $M_B \subseteq M_A$.
   - D. We kunnen niks over deze relatie zeggen.
2. Zij gegeven een formule F in DNV met > 1 disjunctieleden. Als in precies één disjunctielid van F complementaire literalen voorkomen, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen over F?
   - A. F is een tautologie.
   - B. F is een contradictie.
   - C. F is vervulbaar.
   - D. F is onvervulbaar.
3. Welke van de volgende uitspraken is waar?
   - A. $ATOM \subseteq FORM$.
   - B. $LIT \subseteq ATOM$.
   - C. $VAR \subseteq FORM$.
   - D. $LIT \subseteq ZIN$.
4. Welke van de volgende uitspraken is **niet** waar?
   - A. $ATOM \subseteq LIT$.
   - B. $TERM \subseteq ZIN$.
   - C. $VAR \subseteq TERM$.
   - D. $LIT \subseteq FORM$.
5. Stel dat $\Gamma \subseteq FORM$ en $F \in FORM$ dusdanig zijn dat tenminste één tak in een boom voor de redenering $\Gamma \models F$ **niet** sluit. Wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. F is een contradictie.
   - B. $\Gamma \models \neg F$.
   - C. F is geen tautologie.
   - D. Γ is onvervulbaar.
6. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$ met 0 of meer premissen, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als één van de premissen een contingentie is, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. De redenering is logisch geldig.
   - B. De redenering is niet logisch geldig.
   - C. De verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ is onvervulbaar.
   - D. We kunnen niets bijzonders zeggen.
7. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $\Gamma = \emptyset$, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?
   - A. De redenering is logisch geldig.
   - B. De redenering is niet logisch geldig.
   - C. De verzameling $\Gamma \cup \{\neg C\}$ is onvervulbaar.
   - D. We kunnen niets bijzonders zeggen.

8. Zij gegeven een redenering $\Gamma \therefore C$, waar $\Gamma \subseteq PROP$ en $C \in PROP$. Als $\Gamma \cup \{\neg C\}$ vervulbaar is, wat kunnen we dan met zekerheid zeggen?

   A. De redenering is logisch geldig.

   B. De redenering is niet logisch geldig.

   C. De conclusie is een contradictie.

   D. De conclusie is een contingentie.

9. Zij gegeven de eerste-ordetaal L met daarin 1-plaatsige predicaatsymbolen A en B, en 2-plaatsig predicaatsymbool R. Zij verder gegeven de structuur $\mathcal{F} = \langle D; R_0, R_1, R_2 \rangle$ voor deze taal, waar $D = \{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4\}$, $R_0 = \{d_0, d_1, d_3\}$, $R_1 = \{d_1, d_2\}$, en $R_2 = \{(d_1, d_1), (d_2, d_3), (d_2, d_2)\}$. Er geldt dat $A^{\mathcal{F}} = R_0$, $B^{\mathcal{F}} = R_1$ en $R^{\mathcal{F}} = R_2$.

   Welke van de volgende formules in **niet** waar in $\mathcal{F}$?

   A. $\forall x(A(x) \to \exists y(B(y) \wedge R(y,x)))$.

   B. $\exists x \neg(\neg A(x) \to B(x))$.

   C. $\forall x(B(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(y,x)))$.

   D. $\neg \exists x(\forall y(\neg A(y) \vee \neg R(x,y)) \wedge B(x))$.

10. Beschouw opnieuw de taal van de vorige vraag, en ook de formules

    - $F = \exists x(A(x) \wedge \forall y(B(y) \to R(y,x)))$ en
    - $G = \forall x(B(x) \to \exists y(A(y) \wedge R(x,y)))$.

    Welke van de volgende uitspraken is waar?

    A. $F \models G$.

    B. $G \models F$.

    C. $\models F$.

    D. $\models G$.

11. Welke van de onderstaande paren formules zijn equivalent?

    A. $q \to \neg p$ en $p \wedge q$.

    B. $\neg q$ en $\neg((p \wedge \neg(q \to p)) \vee q)$.

    C. $p \vee \neg q$ en $\neg(p \wedge \neg q)$.

    D. $p \vee (q \to p)$ en $p \leftrightarrow (q \vee p)$.

12. Zij A, B en C verzamelingen. Beschouw de volgende bewering:

    Bewering. *Als* $A \subseteq B$ *en* $B \in C$, *dan* $A \subseteq C$.

    Deze bewering is niet waar. Welke verzamelingen vormen een tegenvoorbeeld?

    A. $A = \{0\}$, $B = \{0,1\}$ en $C = \{0,1\}$.

    B. $A = \{0,1\}$, $B = \{0,1\}$ en $C = \{\{0,1\}\}$.

    C. $A = \{0\}$, $B = \{0\}$ en $C = \{0, \{0\}\}$.

    D. $A = \{0,1\}$, $B = \{1\}$ en $C = \{\{1\}\}$.

13. Zij $A, B \in PROP$. Beschouw de volgende bewering.

    Bewering. $(\models A \quad \Rightarrow \quad \models B) \quad \Rightarrow \quad \models A \to B$.

    De bewering is niet waar. Welke formules vormen een tegenvoorbeeld?

    A. $A = p \vee \neg p$ en $B = p$.

    B. $A = p \wedge \neg p$ en $B = \neg p$.

    C. $A = p$ en $B = p \wedge \neg p$.

    D. $A = p$ en $B = p \vee \neg p$.

14. Zij A, B en C verzamelingen. Welke uitspraak is waar?
    A. Als $A \subseteq B$ en $B \in C$, dan $A \in C$.
    B. Als $A \subseteq B$ en $B \in C$, dan $A \subseteq C$.
    C. Als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, dan $A \in C$.
    D. Als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$, dan $A \subseteq C$.

15. Welke van de volgende formules is geen element van $PROP$?
    A. $(p \vee \neg\neg p) \leftrightarrow q$
    B. $(\neg\neg\neg q \vee \neg p)$
    C. r
    D. $(\neg p \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg p))$

Open vragen

1. **Verzamelingen (alléén voor IN1305-A)**
   (a) (1 punt) Geef de definitie van de machtsverzameling van een gegeven verzameling B.
   (b) (1 punt) Zij gegeven de verzameling $A = \{a, b, c\}$. Geef de machtsverzameling 2^A als opsomming van elementen.
   (c) (4 punten) Zij A, B en C verzamelingen. Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef een duidelijk antwoord. Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (in de vorm van *specifieke, concrete verzamelingen met elementen*, dus geen Venn-diagram!) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.
   Bewering. *Als* $A \subseteq B$ *en* $C \subseteq B$, *dan* $B^c \subseteq (A \cup C)^c$.

2. **Boommethode (voor zowel IN1305-A als TI1300)**
   Beantwoord met behulp van de boommethode de vraag of de volgende bewering waar of onwaar is. Geef duidelijk antwoord en leg uit hoe je antwoord volgt uit je boom. Als je antwoordt dat de bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont (dat mag in de vorm van een plaatje) en leg uit hoe dit tegenvoorbeeld aantoont dat de bewering onwaar is.
   (a) (6 punten)
   Bewering. $\forall x(K(x) \to \exists y(M(y,x) \wedge J(x,y))) \models \forall x \forall y((K(x) \wedge M(y,x)) \to J(x,y))$.

3. **Meta-beweringen (voor zowel IN1305-A als TI1300)**
   Zij A en B formules uit $PROP$. Bepaal of de volgende bewering waar of onwaar is. Als je denkt dat de bewering waar is, geef er dan een bewijs voor. Als je denkt dat een bewering onwaar is, geef dan een tegenvoorbeeld dat dit aantoont, en *leg uit* hoe je tegenvoorbeeld de onwaarheid van de bewering laat zien.
   (a) (6 punten)
   Bewering. *Als* $\sim (A \models B)$ *dan* $A \models \neg B$.

4. **Inductie (voor zowel IN1305-A als TI1300)**
   (a) (6 punten) Bewijs dat voor alle natuurlijke getallen $n \geq 1$ geldt dat $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

5. **Fitch (voor zowel IN1305-A als TI1300)**
   (a) (6 punten) Bewijs in het **niet-uitgebreide** systeem $\mathcal{F}$ voor natuurlijke deductie volgens Fitch de volgende stelling.
   Stelling. $A \vee B, \neg A \vee C \vdash B \vee C$.

6. **Resolutie (alléén voor TI1300)**
   (a) (1 punt) Breng de volgende formule in prenexnormaalvorm: $\forall x(\forall y P(x,y) \to \forall y \neg \forall z Q(y,z))$.
   (b) (1 punt) Breng het resultaat van opdracht a in Skolemnormaalvorm.
   (c) (4 punten) Bewijs met resolutie de volgende stelling:
   Stelling. $\forall x \exists y R(x,y), \forall x \forall y(R(x,y) \to S(x,y)) \vdash \forall x \exists y S(x,y)$.

Einde tentamenopgaven