

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1100 TI

27 januari 2012, 09.00–11.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.  
 Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Je mag het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** gebruiken.  
 Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn **niet** toegestaan.*

*Voorzie elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.*

1. a) Vereenvoudig  $\cos(2 \arcsin x)$ .

8

Noem  $\arcsin x = \alpha \implies \sin \alpha = x$ . Het hangt van je aanpak af of je  $\cos \alpha$  nodig hebt. Die haal je uit een rechthoekige driehoek met hypothenusa ter lengte 1 en de rechthoekszijde tegenover  $\alpha$  met lengte  $x^a$ . De andere rechthoekszijde heeft dan lengte  $\sqrt{1-x^2}$  en dat (gedeeld door 1) is tevens  $\cos \alpha$ .

[of:] Je kunt ook uit  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  halen dat  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - x^2}$ ; voor  $x > 0$  en voor  $x < 0$  geldt het  $+$ -teken.

We maken gebruik van een van de uitdrukkingen voor  $\cos 2\alpha$ :

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2x^2, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - x^2) - x^2 = 1 - 2x^2 \text{ of}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2(1 - x^2) - 1 = 1 - 2x^2.$$

We concluderen dat  $\cos(2 \arcsin x) = \cos 2\alpha = 1 - 2x^2$ . § 1.6

---

<sup>a</sup>strikt genomen kan dit alleen maar als  $x > 0$

- b) Geef alle  $x$  waarvoor deze uitdrukking geldig is.

2

In bovenstaande afleidingen is stilzwijgend  $x > 0$  verondersteld. Als  $x < 0$  is  $-x > 0$  en volgt:  $\cos(2 \arcsin x) = \cos(-2 \arcsin(-x)) = \cos(2 \arcsin(-x)) \stackrel{a)}{=} 1 - (-x)^2 = 1 - x^2$ , wat wil zeggen dat de betrekking ook dan geldt.

Voor  $x = 0$  komt er  $\cos(2 \arcsin 0) = \cos 0 = 1 = 1 - 0^2$  en geldt de betrekking.

Voor  $x = 1$  (dus  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ) kan de betrekking ook rechtstreeks worden gecontroleerd.

Ten slotte moet  $x$  in het domein van  $\arcsin$  liggen, ofwel  $-1 \leq x \leq 1$ .

De betrekking geldt dus voor alle  $x \in [-1, 1]$ . § 1.6

2. Een kromme wordt impliciet gegeven door de betrekking  $x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$ .

Bepaal de raaklijn aan de kromme in het punt  $(2, -1)$ .

10

Behandel  $y$  als functie van  $x$ ; differentieer de leden van de vergelijking impliciet naar  $x$ ; aldus vinden we  $1 + 2y' + 0 = \frac{2yy'}{x-1} - \frac{y^2}{(x-1)^2}$ . Hierin  $x = 2$  en  $y = -1$  invullen levert  $1 + 2y' = -2y' - 1 \iff y' = -\frac{1}{2}$ .

De vergelijking luidt:  $y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \iff x + 2y = 0$ . § 3.5

3. Bereken  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}$ . 10

We gebruiken de regel van De l'Hospital drie keer achtereenvolgens:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{l'Hos}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{l'Hos}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin 2x}{2e^x - 2} \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{l'Hos}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos 2x}{2e^x} = \frac{-2 + 8}{2} = 3. \quad \text{\textcolor{red}{§ 4.4}}$$

4. Bereken  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ . 10

Substitueer  $u = \cos x \implies du = -\sin x dx$ ; de grenzen zijn  $u(0) = 1$  en  $u(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \stackrel{u=\cos x}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-(1-u^2)}{u^4} du = \left[ \frac{3}{u^2} - \frac{1}{u} \right]_1^{\frac{1}{2}} = 12 - 2 - 3 + 1 = 8. \quad \text{\textcolor{red}{§ 5.5}}$$

5. Bepaal  $\int_1^{\infty} (x^2 - 2x) e^{-4x} dx$ . 10

De integraal is alleen oneigenlijk in  $\infty$ . We beginnen met primitiveren.  
De factor  $x^2 - 2x$  verdwijnt onder het integraalteken door twee keer partieel integreren:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(x^2 - 2x)}_u \cdot \underbrace{e^{-4x}}_{v'} dx &= \underbrace{(x^2 - 2x)}_u \cdot \underbrace{-\frac{1}{4}e^{-4x}}_v - \int \underbrace{(2x - 2)}_{u'} \cdot \underbrace{-\frac{1}{4}e^{-4x}}_v dx \text{ en} \\ \int \underbrace{(2x - 2)}_u \cdot \underbrace{e^{-4x}}_{v'} dx &= \underbrace{(2x - 2)}_u \cdot \underbrace{-\frac{1}{4}e^{-4x}}_v - \int \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{-\frac{1}{4}e^{-4x}}_v dx \text{ combineren we tot} \\ &= -\frac{1}{4}(x^2 - 2x)e^{-4x} + \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4}(2x - 2)e^{-4x} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4}e^{-4x} \right) + C = \left( -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{32} \right) e^{-4x} + C. \\ \int_1^{\infty} (x^2 - 2x) e^{-4x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b (x^2 - 2x) e^{-4x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \left( -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{32} \right) e^{-4x} \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{32}(-8b^2 + 12b + 3)e^{-4b} - \frac{1}{32}(-8 + 12 + 3)e^{-4} = 0 - \frac{7}{32}e^{-4} = -\frac{7}{32e^4}. \quad \text{\textcolor{red}{§ 7.1 / 7.8}} \end{aligned}$$

6. Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y' + y &= e^x \\ y(0) &= 1 \end{cases}.$$

10

De differentiaalvergelijking is lineair en staat in standaardvorm.  
Integrerende factor:  $I(x) = \exp(\int 1 dx) = e^x$ ; inderdaad is  $(e^x y)' = e^x (y' + y)$ .  
Algemene oplossing:  $y(x) = \frac{1}{e^x} \int e^x \cdot e^x dx = e^{-x} \left( \frac{1}{2}e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$ .  
Beginvoorwaarde:  $y(0) = \frac{1}{2}e^0 + Ce^{-0} = \frac{1}{2} + C = 1 \iff C = \frac{1}{2}$ .  
Gevraagde oplossing:  $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ .<sup>a</sup> \text{\textcolor{red}{§ 9.5}}

---

<sup>a</sup>deze functie staat bekend als de sinus hyperbolicus:  $y(x) = \sinh x$  (zie § 3.11)

7. Los de volgende eerste-orde differentiaalvergelijking op:

$$\frac{dx}{dt} = e^x \sin t.$$

10

De vergelijking is separabel, en we herschrijven tot  $e^{-x} dx = \sin t dt$ . We primitiveren:

$$\int e^{-x} dx = \int \sin t dt \iff -e^{-x} = -\cos t + C \iff x = -\ln(\cos t - C).$$

§ 9.3

8. Geef de algemene oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking

$$y'' - 4y' + 7y = e^{2x}.$$

10

De differentiaalvergelijking is lineair en van de tweede orde; de coëfficiënten zijn constant. We lossen eerst de gereduceerde (homogene) vergelijking op. Karakteristieke vergelijking:

$$r^2 - 4r + 7 = 0 \iff r = 2 \pm i\sqrt{3} \implies y_r(x) = C_1 e^{2x} \cos(x\sqrt{3}) + C_2 e^{2x} \sin(x\sqrt{3}).$$

Het rechterlid is „speciaal”; we zoeken er een particuliere oplossing bij (modificatie onnodig!):

$y_p(x) = a e^{2x} \implies y'_p(x) = 2a e^{2x} \implies y''_p(x) = 4a e^{2x}$ ; invullen in het linkerlid levert  $4a e^{2x} - 4 \cdot 2a e^{2x} + 7a e^{2x} = 3a e^{2x}$  hetgeen gelijk zou moeten zijn aan het rechterlid  $e^{2x} \implies 3a = 1 \implies a = \frac{1}{3}$ .

De algemene oplossing is

$$y_a(x) = y_p(x) + y_r(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + C_1 e^{2x} \cos(x\sqrt{3}) + C_2 e^{2x} \sin(x\sqrt{3}).$$

§ 17.2

9. a) Schrijf  $-8 + 8i\sqrt{3}$  in modulus-argumentvorm.

5

Zij  $c = -8 + 8i\sqrt{3} \implies |c| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$ .

$\cos \arg c = \frac{\operatorname{Re} c}{|c|} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$  en  $\sin \arg c = \frac{\operatorname{Im} c}{|c|} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ; de waarde van  $\arg c$  die daaraan voldoet en in  $[0, 2\pi)$  ligt is  $\frac{2\pi}{3}$ .

[of:]  $\tan \arg c = \frac{\operatorname{Im} c}{\operatorname{Re} c} = \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; omdat  $c$  in het tweede kwadrant ligt is  $\frac{\pi}{2} < \arg c < \pi$ , en we vinden  $\arg c = \frac{2\pi}{3}$  (en dat is  $\arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi$ !).

Conclusie:  $c = -8 + 8i\sqrt{3} = 16 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ , ook te schrijven als  $16 e^{\frac{2\pi}{3}i}$ . App. H

b) Geef nu alle oplossingen van de vergelijking  $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ .

5

Met  $z = re^{i\vartheta} = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$  en  $c = -8 + 8i\sqrt{3}$  is de op te lossen vergelijking (een binomiaalvergelijking):  $z^4 = c \iff r^4 e^{4i\vartheta} = 16 e^{\frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i}$  ( $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ ).

Gelijkstellen van de moduli en argumenten in beide leden levert:

$$k = 0 : r = 2 \text{ en } \vartheta_0 = \frac{1}{6}\pi \implies z_0 = 2 e^{\frac{1}{6}\pi i} = 2 \left( \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i;$$

$$k = 1 : r = 2 \text{ en } \vartheta_1 = \frac{2}{3}\pi \implies z_1 = 2 e^{\frac{2}{3}\pi i} = 2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right) = -1 + i\sqrt{3};$$

$$k = 2 : r = 2 \text{ en } \vartheta_2 = \frac{7}{6}\pi \implies z_2 = 2 e^{\frac{7}{6}\pi i} = 2 \left( -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i; \text{ en}$$

$$k = 3 : r = 2 \text{ en } \vartheta_3 = \frac{5}{3}\pi \implies z_3 = 2 e^{\frac{5}{3}\pi i} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

App. H

### Normering

*Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.*

*Als  $n$  het totale aantal gescoorde punten is ( $0 \leq n \leq 90$ ),*

*en  $q$  het resultaat van de quizzen voor deel 1 ( $0 \leq q \leq 1$ )*

*is het cijfer  $c = 1 + \frac{n}{10} + q$  (afgerond,  $1 \leq c \leq 10$ ).*