

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1 100 TI / wi 1 005 In
 4 november 2011, 14.00–16.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
 Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Je mag het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** gebruiken.
 Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn **niet** toegestaan.*

Voorzie elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.

1. a) Vereenvoudig $\tan^2(2 \arcsin x)$ voor $x \in (0, 1)$, $x \neq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. 8

Noem $\arcsin x = \alpha$. We maken gebruik van enkele goniometrische betrekkingen:
 $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ en $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ terwijl $\sin \alpha = x$ en
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - x^2}$. Daarmee vinden we $\tan^2(2 \arcsin x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$.

[of:] Omdat $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ geldt (zie boven): $\tan^2(2 \arcsin x) = 1 - \frac{1}{1 - x^2} = \frac{x^2}{1 - x^2}$.

[of:] Gebruikmaken van de dubbele-hoekformule voor de tangens kan ook. § 1.6

- b) Waarom is hierboven $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ uitgezonderd? 2

Als $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ geldt hierboven $\alpha = \frac{\pi}{4}$ en is $\cos 2\alpha = 0$; in de afleiding zou door nul gedeeld worden. De te vereenvoudigen uitdrukking is niet gedefinieerd voor die waarde van x : $\tan \frac{\pi}{2}$ bestaat niet. § 1.6

2. Een kromme wordt impliciet gegeven door de betrekking $\tan(xy) = \sin(x + y)$.
 Bepaal de raaklijn aan de kromme in het punt $(0, 0)$. 10

Behandel y als functie van x en differentieer beide zijden van de vergelijking impliciet naar x ; aldus vinden we $\frac{1}{\cos^2(xy)} \cdot (y + xy') = \cos(x + y) \cdot (1 + y')$. Hierin $x = 0$ en $y = 0$ invullen levert $1 \cdot 0 = 1 \cdot (1 + y') \iff y' = -1$.

De vergelijking luidt: $y - 0 = -(x - 0) \iff x + y = 0$. § 3.5

3. Bereken $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2 - 4x^3}$. 10

We gebruiken de regel van De l'Hospital twee keer achtereen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2 - 4x^3} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{4x} - 4}{2x - 12x^2} \stackrel{[0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16e^{4x}}{2 - 24x} = \frac{16}{2} = 8.$$

Dit is som 9 van Stewart, 6th ed., § 4.R § 4.4

4. Bereken $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$. 10

Substitueer $u = 1 + 2x \implies du = 2 dx$; de grenzen zijn $u(0) = 1$ en $u(4) = 9$:

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx \stackrel{u=1+2x}{=} \int_1^9 \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{\sqrt{u}} \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int_1^9 \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{u} \right]_1^9 =$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \cdot 27 - 2 \cdot 3 - \frac{2}{3} \cdot 1 + 2 \cdot 1 \right) = \frac{10}{3} \quad \text{N.B. dit is som 66 van Stewart, 6th ed., § 5.5.}$$

[of:] De substitutie $v = \sqrt{1+2x}$ is ook bruikbaar: zij leidt tot $\int_1^3 \frac{1}{2} (v^2 - 1) dv$. § 5.5

5. Bepaal $\int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx$. 10

De integraal is zowel oneigenlijk in $-\infty$ als in 0 . We beginnen met primitiveren.

De factor x verdwijnt onder het integraalteken bij partieel integreren:

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'} dx = \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v'} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_v dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + C.$$

$$\int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} x e^{2x} dx + \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_{-1}^b x e^{2x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} \right]_a^b =$$

$$- \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{4}(2a-1)e^{2a} + \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{4}(2b-1)e^{2b} = 0 + \frac{1}{4}(0-1)e^0 = -\frac{1}{4}. \quad \text{§ 7.1 / 7.8}$$

6. Gegeven is de eerste-orde differentiaalvergelijking $2ye^{y^2} y' = 2x + 3\sqrt{x} \quad (x > 0)$. 10
Geef de algemene oplossing van deze vergelijking.

De vergelijking is separabel, en de veranderlijken zijn al gescheiden. We primitiveren:

$$\int 2ye^{y^2} y' dx = \int (2x + 3\sqrt{x}) dx \iff e^{y^2} = x^2 + 2x\sqrt{x} + C \iff y^2 = \ln(x^2 + 2x\sqrt{x} + C)$$

$$y = \pm \sqrt{\ln(x^2 + 2x\sqrt{x} + C)}.$$

Er is geen informatie over het voorteken.

Dit is som 7 van Stewart, 6th ed., § 9.R § 9.5

7. Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} xy' + 2y = 12x^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}.$$

10

De differentiaalvergelijking is lineair; delen door x levert: $y' + \frac{2}{x}y = 12x$.

Integrerende factor: $I(x) = \exp(\int \frac{2}{x} dx) = e^{2 \ln|x|} = x^2$.

Algemene oplossing: $y(x) = \frac{1}{x^2} \int x^2 \cdot 12x dx = \frac{1}{x^2} (3x^4 + C) = 3x^2 + \frac{C}{x^2}$.

Beginvoorwaarde: $y(-1) = 3 + C = 1 \iff C = -2$.

Gevraagde oplossing: $y(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^2} \quad (x < 0)$. § 9.5

8. Geef de algemene oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking

$$y'' + y' - 2y = x + \sin 2x.$$

10

De differentiaalvergelijking is lineair en van de tweede orde; de coëfficiënten zijn constant. We lossen eerst de gereduceerde (homogene) vergelijking op. Karakteristieke vergelijking:

$$r^2 + r - 2 = 0 \iff r = 1 \text{ of } r = -2 \implies y_r(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Het rechterlid is de som van twee „speciale” termen; voor beide zoeken we een particuliere oplossing (geen modificatie nodig!); dat kan ineens:

$$y_p(x) = ax + b + c \sin 2x + d \cos 2x \implies y'_p(x) = a + 2c \cos 2x - 2d \sin 2x \implies y''_p(x) = -4c \sin 2x - 4d \cos 2x; \text{ invullen in het linkerlid levert}$$

$$-4c \sin 2x - 4d \cos 2x + a + 2c \cos 2x - 2d \sin 2x - 2(ax + b + c \sin 2x + d \cos 2x) = -2ax + a - 2b + (-6c - 2d) \sin 2x + (2c - 6d) \cos 2x \text{ hetgeen gelijk zou moeten zijn aan } 1x + 0 + 1 \sin 2x + 0 \cos 2x \implies -2a = 1, a - 2b = 0, -6c - 2d = 1 \text{ en } 2c - 6d = 0.$$

We vinden $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = -\frac{3}{20}$ en $d = -\frac{1}{20}$. De algemene oplossing is

$$y_a(x) = y_p(x) + y_r(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{3}{20} \sin 2x - \frac{1}{20} \cos 2x + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}. \quad \text{\textcolor{red}{§ 17.2}}$$

9. a) Bereken $z = \frac{2-3i}{3+2i}$, $|z|$ en $\arg z$.

4

bonus: welke meetkundige betekenis heeft het „mooie” antwoord?

Vermenigvuldig teller en noemer met de complex toegevoegde van de noemer:

$$z = \frac{2-3i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i-9i-6}{3^2+2^2} = \frac{-13i}{13} = -i \implies$$

$$|z| = 1 \text{ en } \arg z = -\frac{\pi}{2}.$$

Blijkbaar liggen $2-3i$ en $3+2i$ in het complexe vlak op dezelfde afstand van de oorsprong, en maken de voerstralen onderling een rechte hoek.

Anders gezegd: de driehoek met hoekpunten 0 , $2-3i$ en $3+2i$ is rechthoekig-gelijkbenig, met de rechte hoek in de oorsprong. App. H

- b) Formuleer de stelling van De Moivre en leid daarmee de bekende formules voor $\cos 2\vartheta$ en $\sin 2\vartheta$ af. *Aanwijzing:* vergelijk reële en imaginaire delen. 6

Voor alle $n \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$ en $\vartheta \in \mathbb{R}$ geldt $(r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta))^n = r^n(\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$.

Als $r = 1$ en $n = 2$ staat er $(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^2 = \cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta$.

Het linkerlid kan worden uitvermenigvuldigd tot $\cos^2 \vartheta + 2i \sin \vartheta \cos \vartheta - \sin^2 \vartheta$.

Door gelijkstellen van de reële en imaginaire delen van beide leden blijkt dat

$$\sin 2\vartheta = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \text{ en } \cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta. \quad \text{\textcolor{red}{App. H}}$$

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.

Als n het totale aantal gescoorde punten is ($0 \leq n \leq 90$),

en q het resultaat van de quizen voor deel 1 ($0 \leq q \leq 1$)

is het cijfer $c = 1 + \frac{n}{10} + q$ (afgerond, $1 \leq c \leq 10$).