

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1 100 TI / wi 1 005 In
 17 januari 2011, 10.00–12.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
 Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Je mag het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** gebruiken.
 Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn **niet** toegestaan.*

Voorzie elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.

code wi 1 100 TI geldt vanaf 2010, code wi 1 005 In voor studenten van daarvoor;
 afhankelijk van de code kies je som 8 of som 9

1. a) Schrijf $\tan(\arccos \frac{1}{x})$ ($x > 1$) zonder (invers) goniometrische functies. 8
- b) Zoek uit voor welke andere waarden van x een dergelijke betrekking geldt. 2

We noemen $\arccos \frac{1}{x} = \alpha$, en geven α in een recht-hoekige driehoek weer, en wel zo (zie figuur): laat α een der scherpe hoeken zijn, geef de aanliggende zijde als lengte 1, en de hypothenusa lengte x ; de lengte van de overstaande zijde is dan $\sqrt{x^2 - 1}$; in de figuur zien we dat inderdaad: $\cos \alpha = \frac{1}{x}$ en $\tan(\arccos \frac{1}{x}) = \tan \alpha = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1} = \sqrt{x^2 - 1}$.

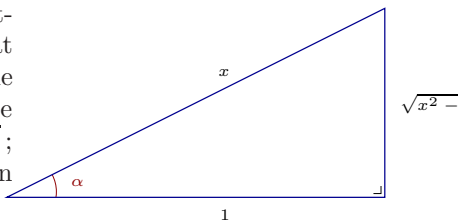
Opmerking: $x > 1$ zorgt ervoor dat het argument van de $\arccos x$ tussen 0 en 1 ligt, en voorkomt dat onder het wortelteken een negatief getal komt te staan.

[of:] De betrekking bewijzen met alleen goniometrische formules is onaantrekkelijk.^a

[of:] De volgende aanpak is ook correct (zij het omslachtig): differentieer de uitdrukking naar x , en primitieveer de uitkomst (zie tabel). Dan valt alleen de integratieconstante nog te bepalen. Invullen van bijvoorbeeld $x = 1$ laat zien dat die constante 0 bedraagt.

Invullen leert dat $x = \pm 1$ geen probleem oplevert, maar als $-1 < x < 1$ bestaat $\arccos \frac{1}{x}$ noch $\sqrt{x^2 - 1}$. Als $x < -1$ geldt de gevonden betrekking evenmin: omdat $-1 < \frac{1}{x} < 0$ geldt $\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{1}{x} < \pi$, dus $\tan(\arccos \frac{1}{x}) < 0$; echter, $\sqrt{x^2 - 1} > 0$. § 1.6

^a $1 + \tan^2(\arccos \frac{1}{x}) = \frac{1}{\cos^2(\arccos \frac{1}{x})} = \frac{1}{(\frac{1}{x})^2} = x^2 \stackrel{x>1}{\implies} \tan(\arccos \frac{1}{x}) = \sqrt{x^2 - 1}$



2. Laat door middel van *differentiatie* zien dat

$$\int \frac{dx}{x^2(3+4x)} = -\frac{1}{3x} + \frac{4}{9} \ln \left| \frac{3+4x}{x} \right| + C. \quad 10$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3x} + \frac{4}{9} \ln \left| \frac{3+4x}{x} \right| + C\right)' &= \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{4}{9} (\ln |3+4x| - \ln |x|) + C\right)' = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3+4x} \cdot 4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{3}(3+4x) + \frac{16}{9}x^2 - \frac{4}{9}x(3+4x)}{x^2(3+4x)} = \frac{1 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{9}x^2 - \frac{12}{9}x - \frac{16}{9}x^2}{x^2(3+4x)} = \frac{1}{x^2(3+4x)}. \end{aligned}$$

Opmerking: rechtstreeks primitiveren wordt niet gevraagd, maar is wel mogelijk: de integrand is rationaal (§ 7.4, inclusief breuksplitsen).

Opmerking: de gelijkheid is formule (50) achter uit het boek, voor $a = 3, b = 4$. § 3.4/4.9

3. Bepaal een vergelijking van de raaklijn in het punt $P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ aan de kromme gegeven door $x \sin 2y = y \cos 2x$. 10

Laat y functie van x zijn; differentieer van de vergelijking $x \sin 2y = y \cos 2x$ beide zijden impliciet naar x ; we vinden $\sin 2y + 2x \cos 2y y' = y' \cos 2x - 2y \sin 2x$.

Hierin $x = \frac{\pi}{4}$ en $y = \frac{\pi}{2}$ invullen levert $0 + \frac{\pi}{2} \cdot -1 y' = 0 y' - \pi \cdot 1 \iff y' = 2$.

De vergelijking luidt: $y - \frac{\pi}{2} = 2(x - \frac{\pi}{4}) \iff y = 2x$. § 3.5

4. Bereken $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} dx$. 10

De integraal is oneigenlijk in ∞ (de situatie in 1 geeft geen aanleiding tot voorzorgen); we primitiveren eerst de integrand.

We substitueren de uitdrukking onder het wortelteken: $u = 1 - \frac{1}{x^2} \implies du = \frac{2}{x^3} dx$:

$$\int \frac{1}{x^3} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} dx \stackrel{u=1-\frac{1}{x^2}}{=} \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (1 - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

[of:] Omdat $u(1) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$ kunnen we evengoed $\int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{u} du$ berekenen.

[of:] De substitutie $u = \frac{1}{x^2}$ werkt ook, maar gaat minder soepel. § 5.5/7.8

5. Laat door middel van partiële integratie zien dat (voor $n > 1$) geldt:

$$\begin{aligned} \int x^n \cos x dx &= x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx \quad \text{en daarmee} \\ \int x^n \cos x dx &= x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx. \end{aligned} \quad 10$$

We richten de partiële integratie zo in dat we x^n differentiëren:

$$\int \underbrace{x^n}_u \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx = \underbrace{x^n}_u \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} - \int \underbrace{nx^{n-1}}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_v dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

en herhalen het recept met de laatstgevonden integraal:

$$\int \underbrace{x^{n-1}}_u \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx = \underbrace{x^{n-1}}_u \cdot \underbrace{-\cos x}_{v'} - \int \underbrace{(n-1)x^{n-2}}_{u'} \cdot \underbrace{-\cos x}_v dx$$

welk resultaat we in het eerste substitueren:

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx,$$

een recurrente betrekking van de vorm $I_n = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x + n(n-1) I_{n-2}$. § 7.1

6. Gegeven is de differentiaalvergelijking $\sqrt{x} y' = e^{y+\sqrt{x}}$.

a) Toon aan dat ze separabel is.

2

Door als volgt te herschrijven scheiden we de veranderlijken:

$$\sqrt{x} y' = e^{y+\sqrt{x}} \iff \sqrt{x} \cdot y' = e^y \cdot e^{\sqrt{x}} \iff \frac{y'}{e^y} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}. \quad \text{\textcolor{red}{§ 9.2}}$$

b) Geef de algemene oplossing van de vergelijking (voor $x > 0$).

10

Aanwijzing: substitueer bij integratie $u = \sqrt{x}$.

We primitiveren beide zijden van de aldus verkregen vergelijking:

$$\int e^{-y} dy = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow{u=\sqrt{x}} -e^{-y} = 2e^{\sqrt{x}} + C \iff e^y = -\frac{1}{2e^{\sqrt{x}} + C} \iff y = \ln\left(\frac{-1}{2e^{\sqrt{x}} + C}\right) = -\ln(-(2e^{\sqrt{x}} + C)).$$

We nemen gemakshalve aan: $2e^{\sqrt{x}} + C < 0$. \textcolor{red}{§ 9.2}

c) Geef de oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarde $y(0) = 0$.¹

4

Het gemakkelijkst is substitutie van $x = 0, y = 0$ in $-e^{-y} = 2e^{\sqrt{x}} + C$:

$$-e^0 = 2e^0 + C \iff C = -3; \text{ de gezochte oplossing is dus } y = -\ln(3 - 2e^{\sqrt{x}}). \quad \text{\textcolor{red}{§ 9.2}}$$

7. Vind $x, y \in \mathbb{R}$ die voldoen aan de volgende complexe vergelijking:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i.$$

8

Bereken de eerste term (met de worteltruc) om de vergelijking te vereenvoudigen:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^2 = \left(\frac{2i}{2}\right)^2 = -1.$$

De vergelijking wordt nu $-1 + \frac{1}{x+iy} = 1+i \iff \frac{1}{x+iy} = 2+i \implies$

$$x+iy = \frac{1}{2+i} = \frac{1 \cdot (2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \implies x = \frac{2}{5} \text{ en } y = -\frac{1}{5}.$$

App. H

8. Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} 2y'' + y' - y &= 3e^{-x} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}.$$

12

¹heb je geen algemene oplossing, gebruik dan de (foutieve) „oplossing” $y = -(1 + \sqrt{x})(e^{\sqrt{x}} + C)$.

De differentiaalvergelijking is lineair en van de tweede orde; de coëfficiënten zijn constant. We lossen eerst de gereduceerde (homogene) vergelijking op. Karakteristieke vergelijking:

$$2r^2 + r - 1 = 0 \iff r = \frac{1}{2} \text{ of } r = -1 \implies y_r(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}.$$

Het rechterlid is „speciaal”: een nuldegraads veelterm, vermenigvuldigd met een exponentiële functie (met exponent -1) en een goniometrische functie (hoekfrequentie 0). We zoeken een particuliere oplossing $y_p(x)$ van de vorm (extra x nodig omdat e^{-x} in y_r voorkomt!)

$$y_p(x) = a x e^{-x} \implies y'_p(x) = -a x e^{-x} + a e^{-x} \implies y''_p(x) = a x e^{-x} - 2a e^{-x};$$

invullen levert de voorwaarde $2(a x e^{-x} - 2a e^{-x}) + (-a x e^{-x} + a e^{-x}) - a x e^{-x} = 3 e^{-x}$ voor alle $x \implies -3a = 3 \implies a = -1$. De algemene oplossing is

$$y_a(x) = y_p(x) + y_r(x) = -x e^{-x} + C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}.$$

Om aan de eerste beginvoorwaarde te voldoen dient $y_a(0) = 0 \iff -0 e^{-0} + C_1 e^{\frac{1}{2} \cdot 0} + C_2 e^{-0} = 0 \iff C_1 + C_2 = 0 \iff C_2 = -C_1$.

Differentiëren levert $y'_a(x) = x e^{-x} - e^{-x} + C_1 \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} - C_2 e^{-x}$.

Aan de tweede beginvoorwaarde is voldaan indien $y'_a(0) = 1 \iff 0 e^{-0} - e^{-0} + C_1 \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} \cdot 0} - C_2 e^{-0} = 1 \iff -1 + \frac{1}{2} C_1 - C_2 = 1 \iff C_1 - 2C_2 = 2$.

Dus is $C_1 = -\frac{2}{3}$ en $C_2 = \frac{2}{3}$. De gezochte oplossing: $y(x) = -x e^{-x} - \frac{2}{3} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{2}{3} e^{-x}$. § 17.2

9. bij code wi 1 100 TI

Bekijk de volgende twee berekeningen, waarvan één correct is uitgevoerd:

A $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$; en

B $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$.

Welke van de twee berekeningen is fout; leg precies uit waarom die fout is.

4

De regel van De l'Hospital mag alleen in de situaties $\left[\frac{0}{0}\right]$ en $\left[\frac{*}{\infty}\right]$ worden gebruikt. Bij deze limiet gaat de teller weliswaar naar 0 , maar de noemer niet (en evenmin naar ∞). De eerste uitwerking is dan ook onjuist. § 4.4

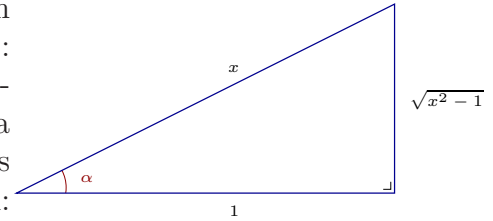
10. bij code wi 1 005 In

Ga na of de differentiaalvergelijking in som 6 lineair is.

4

Een lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking moet geschreven kunnen worden in de vorm $y' + P(x)y = Q(x)$. Dat is hier niet mogelijk, vanwege de e^y , die de differentiaalvergelijking niet-lineair maakt. 9.5

1. a) We noemen $\arccos \frac{1}{x} = \alpha$, en geven α in een rechthoekige driehoek weer, en wel zo (zie figuur): laat α een der scherpe hoeken zijn, geef de aanliggende zijde als lengte 1, en de hypotenusa lengte x ; de lengte van de overstaande zijde is dan $\sqrt{x^2 - 1}$; in de figuur zien we dat inderdaad: $\cos \alpha = \frac{1}{x}$ en $\tan(\arccos \frac{1}{x}) = \tan \alpha = \sqrt{x^2 - 1}$.



Opmerking: $x > 1$ zorgt ervoor dat het argument van de $\arccos x$ tussen 0 en 1 ligt, en dat onder het wortelteken geen negatief getal komt te staan. 8

[of:] De betrekking bewijzen met alleen goniometrische formules is onaantrekkelijk.²

[of:] De volgende aanpak is ook correct (zij het omslachtig): differentieer de uitdrukking naar x , en primitiveer de uitkomst (zie tabel). Dan valt alleen de integratieconstante nog te bepalen. Invullen van bijvoorbeeld $x = 1$ laat zien dat die constante 0 bedraagt.

- b) Invullen leert dat $x = \pm 1$ geen probleem oplevert, maar als $-1 < x < 1$ bestaat $\arccos \frac{1}{x}$ noch $\sqrt{x^2 - 1}$. Als $x < -1$ geldt de gevonden betrekking evenmin: omdat $-1 < \frac{1}{x} < 0$ geldt $\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{1}{x} < \pi$, dus $\tan(\arccos \frac{1}{x}) < 0$; echter, $\sqrt{x^2 - 1} > 0$. 2

$$2. \left(-\frac{1}{3x} + \frac{4}{9} \ln \left| \frac{3+4x}{x} \right| + C\right)' = \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{x} + \frac{4}{9} (\ln |3+4x| - \ln |x|) + C\right)' = \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + \frac{4}{9} \left(\frac{1}{3+4x} \cdot 4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{3}(3+4x) + \frac{16}{9}x^2 - \frac{4}{9}x(3+4x)}{x^2(3+4x)} = \frac{1 + \frac{4}{3}x + \frac{16}{9}x^2 - \frac{12}{9}x - \frac{16}{9}x^2}{x^2(3+4x)} = \frac{1}{x^2(3+4x)}. \quad 10$$

Opmerking: rechtstreeks primitiveren wordt niet gevraagd, maar is wel mogelijk: de integrand is rationaal (§ 7.4, inclusief breuksplitsen).

Opmerking: de gelijkheid is formule (50) achter uit het boek, voor $a = 3, b = 4$.

3. Laat y functie van x zijn; differentieer van de vergelijking $x \sin 2y = y \cos 2x$ beide zijden impliciet naar x ; we vinden $\sin 2y + 2x \cos 2y y' = y' \cos 2x - 2y \sin 2x$.

Hierin $x = \frac{\pi}{4}$ en $y = \frac{\pi}{2}$ invullen levert $0 + \frac{\pi}{2} \cdot -1 y' = 0 y' - \pi \cdot 1 \iff y' = 2$. 10

De vergelijking luidt: $y - \frac{\pi}{2} = 2(x - \frac{\pi}{4}) \iff y = 2x$.

4. De integraal is oneigenlijk in ∞ (de situatie in 1 geeft geen aanleiding tot voorzorgen); we primitiveren eerst de integrand.

We substitueren de uitdrukking onder het wortelteken: $u = 1 - \frac{1}{x^2} \implies du = \frac{2}{x^3} dx$:

$$\int \frac{1}{x^3} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} dx \stackrel{u=1-\frac{1}{x^2}}{=} \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C. \quad 10$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (1 - 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

[of:] Omdat $u(1) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 1$ kunnen we evengoed $\int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{u} du$ berekenen.

[of:] De substitutie $u = \frac{1}{x^2}$ werkt ook, maar gaat minder soepel.



² $1 + \tan^2(\arccos \frac{1}{x}) = \frac{1}{\cos^2(\arccos \frac{1}{x})} = \frac{1}{(\frac{1}{x})^2} = x^2 \stackrel{x \geq 1}{\implies} \tan(\arccos \frac{1}{x}) = \sqrt{x^2 - 1}$

5. We richten de partiële integratie zo in dat we x^n differentiëren:

$$\int \underbrace{x^n}_u \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx = \underbrace{x^n}_u \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} - \int \underbrace{nx^{n-1}}_{u'} \cdot \underbrace{\sin x}_v dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

en herhalen het recept met de laatstgevonden integraal:

$$\int \underbrace{x^{n-1}}_u \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx = \underbrace{x^{n-1}}_u \cdot \underbrace{-\cos x}_{v'} - \int \underbrace{(n-1)x^{n-2}}_{u'} \cdot \underbrace{-\cos x}_v dx \quad 10$$

welk resultaat we in het eerste substitueren:

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx,$$

een recurrente betrekking van de vorm $I_n = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x + n(n-1) I_{n-2}$.

Opmerking: dit is Stewart, 6th ed., § 7.1, 44^a en levert formule (85).

6. a) Door als volgt te herschrijven scheiden we de veranderlijken: 2

$$\sqrt{x} y' = e^{y+\sqrt{x}} \iff \sqrt{x} \cdot y' = e^y \cdot e^{\sqrt{x}} \iff \frac{y'}{e^y} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

- b) We primitiveren beide zijden van de aldus verkregen vergelijking:

$$\begin{aligned} \int e^{-y} dy &= \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \xrightarrow{u=\sqrt{x}} -e^{-y} = 2e^{\sqrt{x}} + C \iff e^y = -\frac{1}{2e^{\sqrt{x}} + C} \iff \\ y &= \ln\left(\frac{-1}{2e^{\sqrt{x}} + C}\right) = -\ln(-(2e^{\sqrt{x}} + C)). \text{ We nemen gemakshalve aan: } 10 \\ 2e^{\sqrt{x}} + C &< 0. \end{aligned}$$

- c) Het gemakkelijkst is substitutie van $x = 0, y = 0$ in $-e^{-y} = 2e^{\sqrt{x}} + C$: 4
 $-e^0 = 2e^0 + C \iff C = -3$; de gezochte oplossing is dus $y = -\ln(3 - 2e^{\sqrt{x}})$.

7. Bereken de eerste term (met de worteltruc) om de vergelijking te vereenvoudigen:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^2 = \left(\frac{2i}{2}\right)^2 = -1. \quad 8$$

De vergelijking wordt nu $-1 + \frac{1}{x+iy} = 1+i \iff \frac{1}{x+iy} = 2+i \implies$

$$x+iy = \frac{1}{2+i} = \frac{1 \cdot (2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2-i^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \implies x = \frac{2}{5} \text{ en } y = -\frac{1}{5}.$$



8. De differentiaalvergelijking is lineair en van de tweede orde; de coëfficiënten zijn constant. We lossen eerst de gereduceerde (homogene) vergelijking op. Karakteristieke vergelijking:

$$2r^2 + r - 1 = 0 \iff r = \frac{1}{2} \text{ of } r = -1 \implies y_r(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}.$$

Het rechterlid is „speciaal”: een nuldegraads veelterm, vermenigvuldigd met een exponentiële functie (met exponent -1) en een goniometrische functie (hoekfrequentie 0). We zoeken een particuliere oplossing $y_p(x)$ van de vorm (extra x nodig omdat e^{-x} in y_r voorkomt!)

$$y_p(x) = a x e^{-x} \implies y'_p(x) = -a x e^{-x} + a e^{-x} \implies y''_p(x) = a x e^{-x} - 2a e^{-x};$$

invullen levert de voorwaarde $2(a x e^{-x} - 2a e^{-x}) + (-a x e^{-x} + a e^{-x}) - a x e^{-x} = 3 e^{-x}$ voor alle $x \implies -3a = 3 \implies a = -1$. De algemene oplossing is 12

$$y_a(x) = y_p(x) + y_r(x) = -x e^{-x} + C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x}.$$

Om aan de eerste beginvoorwaarde te voldoen dient $y_a(0) = 0 \iff -0 e^{-0} + C_1 e^{\frac{1}{2} \cdot 0} + C_2 e^{-0} = 0 \iff C_1 + C_2 = 0 \iff C_2 = -C_1$.

Differentiëren levert $y'_a(x) = x e^{-x} - e^{-x} + C_1 \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} - C_2 e^{-x}$.

Aan de tweede beginvoorwaarde is voldaan indien $y'_a(0) = 1 \iff 0 e^{-0} - e^{-0} + C_1 \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2} \cdot 0} - C_2 e^{-0} = 1 \iff -1 + \frac{1}{2} C_1 - C_2 = 1 \iff C_1 - 2C_2 = 4$.

Dus is $C_1 = -\frac{4}{3}$ en $C_2 = \frac{4}{3}$. De gezochte oplossing: $y(x) = -x e^{-x} - \frac{4}{3} e^{\frac{1}{2}x} + \frac{4}{3} e^{-x}$.

9. bij code wi 1 100 TI

De regel van De l' Hospital mag alleen in de situaties $\left[\frac{0}{0}\right]$ en $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ worden gebruikt. 4

Bij deze limiet gaat de teller weliswaar naar 0 , maar de noemer niet (en evenmin naar ∞). De eerste uitwerking is dan ook onjuist.

10. bij code wi 1 005 ln

Een lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking moet geschreven kunnen worden in de vorm $y' + P(x)y = Q(x)$. Dat is hier niet mogelijk, vanwege de e^y , die de differentiaalvergelijking niet-lineair maakt. 4