

tentamen Analyse (deel 1) – wi 1 100 TI / wi 1 005 In
3 november 2010, 10.00–12.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Je mag het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** gebruiken.
Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn **niet** toegestaan.*

Voorzie elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.

code wi 1 100 TI geldt vanaf 2010, code wi 1 005 In voor studenten van daarvoor;
afhankelijk van de code kies je som 8 of som 9

1. a) Toon aan dat voor alle $x > 0$ geldt: $\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \arctan \frac{1}{x}$. 8
b) Geldt deze betrekking ook voor $x < 0$? 2

2. Laat door middel van differentiatie zien dat

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + C. \quad 10$$

3. Bepaal een vergelijking van de raaklijn in het punt $P(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
aan de kromme gegeven door $y^4 = y^2 - x^2$. 10

4. Bepaal $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. 10

5. a) Bepaal $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx$. 10

- b) Hoe is de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx$ gedefinieerd? 4

- c) Bereken $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx$. 4

6. Gegeven is de differentiaalvergelijking $(x+1)y' - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1}$.
- a) Hoe kun je zien dat ze lineair is? 2
- b) Geef de algemene oplossing van de vergelijking (voor $x > -1$). 10
7. Geef de oplossing van het beginwaardeprobleem
- $$\begin{cases} y'' - 4y = 4\sin 2x - 8\cos 2x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$
- 12
8. bij code wi 1 100 TI
- Bereken $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{\tan x}$. 8
9. bij code wi 1 005 In
- Los de volgende binomiaalvergelijking op: $z^3 = -3\sqrt{6} + 9i\sqrt{2}$. 8
- Geef je antwoord in modulus-argumentvorm of in exponentiële schrijfwijze.

Normering

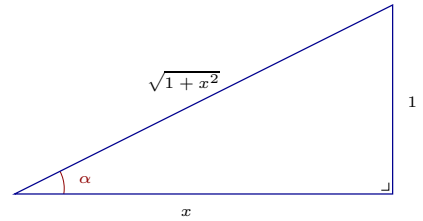
Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.

Als n het totale aantal gescoorde punten is ($0 \leq n \leq 90$),

en q het resultaat van de quizzen voor deel 1 ($0 \leq q \leq 1$)

is het cijfer $c = 1 + \frac{n}{10} + q$ (afgerond, $1 \leq c \leq 10$).

1. a) Noemen we $\arctan \frac{1}{x} = \alpha$, dan kunnen we α in een rechthoekige driehoek weergeven, en wel aldus (zie figuur): laat α een der scherpe hoeken zijn, geef de overstaande zijde als lengte 1, en de aanliggende zijde lengte x ; de lengte van de hypotenusa is dan $\sqrt{1+x^2}$; in de figuur zien we: $\tan \alpha = \frac{1}{x}$ en $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}} \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.



[of:] Bewijzen met behulp van goniometrische formules is onaantrekkelijk.¹

8

[of:] De volgende aanpak is ook correct (zij het omslachtig): differentieer beide uitdrukkingen naar x ; de uitkomsten zijn gelijk. Dat betekent dat de beide gegeven uitdrukkingen als primitieven van de gevonden afgeleiden op een additieve constante na gelijk zijn. Invullen van bijvoorbeeld $x = 1$ laat zien dat die constante 0 bedraagt.

- b) De eis $x > 0$ voorkomt dat door 0 wordt gedeeld, en vermijdt moeilijkheden met het teken: als $x < 0$ is $\arctan \frac{1}{x} < 0$, maar $\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$, en geldt de betrekking niet. De geldigheid blijft derhalve beperkt tot $x > 0$.

2

$$2. \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{\arctan x}{x} + C \right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x - \frac{x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \arctan x \cdot 1}{x^2} = \frac{x(1+x^2) - x \cdot x^2 - x + \arctan x(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} = \frac{\arctan x}{x^2}.$$

Opmerking: rechtstreeks primitiveren wordt niet gevraagd, maar is wel mogelijk, met behulp van partiële integratie, gevolgd door integratie van de rationale integraal (zie de stof van § 7.4, inclusief breuksplitsen).

3. Behandel y als functie van x en differentieer beide zijden van de vergelijking $y^4 = y^2 - x^2$ impliciet naar x ; aldus vinden we $4y^3 y' = 2y y' - 2x$.

$$\text{Hierin } x = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ en } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ invullen levert } 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 y' = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} y' - 2 \frac{\sqrt{3}}{4} \iff \frac{3}{2} \sqrt{3} y' = \sqrt{3} y' - \frac{1}{2} \sqrt{3} \iff y' = -1.$$

10

De vergelijking luidt: $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -(x - \frac{\sqrt{3}}{4}) \iff x + y = \frac{3}{4} \sqrt{3}$.

4. Differentiatie van $\ln x$ maakt de integraal eenvoudiger; we integreren dus partieel:

$$\int \underbrace{\ln x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{v'} dx = \underbrace{\ln x}_u \cdot \underbrace{-\frac{1}{x}}_{v'} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{-\frac{1}{x}}_v dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

5. a) Om de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ weg te werken substitueren we $u = \sqrt{x} \implies du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx \stackrel{u=\sqrt{x}}{=} \int \frac{1}{(u+1)^2} 2 du = 2 \cdot -\frac{1}{u+1} = -\frac{2}{\sqrt{x}+1} + C.$$

10

¹ $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{x^2} \implies \cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+1} \implies \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \xrightarrow{x>0} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

- b) De integraal is dubbel oneigenlijk: van de *eerste* soort in 0 (onbegrensde integrand) en van de *tweede* soort in ∞ . Voor beide is een limietproces vereist:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx. \quad 4$$

Opmerking: het integratie-interval mag elders worden opgeknipt.

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}+1} \right]_a^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}+1} \right]_1^b = \\ &= -1 + \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{a}+1} + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{b}+1} + 1 = -1 + 2 + 0 + 1 = 2. \end{aligned} \quad 4$$

6. a) De vergelijking is van de vorm $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$; de coëfficiëntfuncties a_1 en a_0 en het rechterlid b zijn alleen van x afhankelijk (zie ook § 17.1). 2

- b) De eerste stap bestaat in het delen door de coëfficiënt van y' :

$$(x+1)y' - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1} \xLeftrightarrow{x \neq -1} y' - 2xy = \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2} \implies P(x) = -2x.$$

$$\text{Integrerende factor: } I(x) = \exp\left(\int P(x) dx\right) = \exp\left(\int -2x dx\right) \stackrel{\text{bijv.}}{=} e^{-x^2}. \quad 10$$

$$\begin{aligned} \text{Omdat } Q(x) = \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2} \text{ is } y(x) &= \frac{1}{I(x)} \int I(x) Q(x) dx = e^{x^2} \int e^{-x^2} \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2} dx = \\ &= e^{x^2} \int \frac{dx}{(x+1)^2} = e^{x^2} \left(-\frac{1}{x+1} + C \right) = -\frac{e^{x^2}}{x+1} + C e^{x^2}. \end{aligned}$$

7. De differentiaalvergelijking is lineair en van de tweede orde; de coëfficiënten zijn constant. We lossen eerst de gereduceerde (homogene) vergelijking op. Daartoe lossen we de karakteristieke vergelijking op:

$$r^2 - 4 = 0 \iff r = \pm 2 \implies y_r(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Het rechterlid is „speciaal”: een nuldegraads veelterm, vermenigvuldigd met een exponentiële functie (met exponent 0) en een goniometrische functie (met hoekfrequentie 2); beide termen kunnen gezamenlijk worden behandeld.

We zoeken een particuliere oplossing $y_p(x)$ van de vorm (geen modificatie nodig!)

$$\begin{aligned} y_p(x) &= a \sin 2x + b \cos 2x \implies y_p'(x) = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x \implies \\ y_p''(x) &= -4a \sin 2x - 4b \cos 2x; \text{ invullen levert de voorwaarde} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4a \sin 2x - 4b \cos 2x - 4(a \sin 2x + b \cos 2x) &= 4 \sin 2x - 8 \cos 2x \implies \\ -8a &= 4 \text{ en } -8b = -8 \implies a = -\frac{1}{2} \text{ en } b = 1. \text{ De algemene oplossing is} \end{aligned} \quad 12$$

$$y_a(x) = y_p(x) + y_r(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Om aan de eerste beginvoorwaarde te voldoen dient } y_a(0) &= 2 \iff \\ -\frac{1}{2} \sin(2 \cdot 0) + \cos(2 \cdot 0) + C_1 e^{2 \cdot 0} + C_2 e^{-2 \cdot 0} &= 2 \iff 1 + C_1 + C_2 = 2 \iff C_1 + C_2 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Differentiëren levert } y_a'(x) = -\cos 2x - 2 \sin 2x + 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}.$$

Aan de tweede beginvoorwaarde is voldaan indien $y'_a(0) = 1 \iff -\cos(2 \cdot 0) - 2 \sin(2 \cdot 0) + 2C_1 e^{2 \cdot 0} - 2C_2 e^{-2 \cdot 0} = 1 \iff -1 + 2C_1 - 2C_2 = 1 \iff C_1 - C_2 = 1$.

Dus is $C_1 = 1$ en $C_2 = 0$. De gezochte oplossing: $y(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x + e^{2x}$.

8. bij code wi 1 100 TI

Met de regel van De l' Hospital vinden we: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\ln(x - \frac{\pi}{2})}{\tan x} \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right] \stackrel{l'Hos}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 8$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{l'Hos}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-2 \sin x \cos x}{1} = 0$.

9. bij code wi 1 005 ln

Eerst schrijven we het rechterlid $c = -3\sqrt{6} + 9i\sqrt{2}$ in modulus-argumentvorm:

$$|c| = \sqrt{(-3\sqrt{6})^2 + (9\sqrt{2})^2} = \sqrt{54 + 162} = 6\sqrt{6} \text{ en}$$

$$\tan \arg c = \frac{9\sqrt{2}}{-3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \stackrel{2^e \text{ kwadrant}}{\implies} \arg c = \frac{2}{3}\pi.$$

We weten nu dat $c = 6\sqrt{6} \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) = 6\sqrt{6} e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

De drie gezochte oplossingen zijn derhalve ($k = 0, 1, 2$) 8

$$z_k = \sqrt[3]{|c|} \left(\cos\left(\frac{\frac{2}{3}\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{2}{3}\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right) = \sqrt{6} e^{\left(\frac{\frac{2}{3}\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}; \text{ we vinden:}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{6} \left(\cos \frac{2}{9}\pi + i \sin \frac{2}{9}\pi \right) = \sqrt{6} e^{\frac{2}{9}\pi i}; \\ z_1 &= \sqrt{6} \left(\cos \frac{8}{9}\pi + i \sin \frac{8}{9}\pi \right) = \sqrt{6} e^{\frac{8}{9}\pi i}; \text{ en} \\ z_2 &= \sqrt{6} \left(\cos \frac{14}{9}\pi + i \sin \frac{14}{9}\pi \right) = \sqrt{6} e^{\frac{14}{9}\pi i}. \end{aligned}$$

Deze resultaten zijn niet eenvoudig in rechthoekige gedaante te zetten.