

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 100 TI

11 april 2012, 09.00–11.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Je mag het formuleblad van het instellingspakket en een rekenmachine gebruiken.
Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn niet toegestaan.*

Voorzie elk antwoord van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.

1. Gegeven is de rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (Stewart: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$) met $a_n = \sqrt{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

Deze rij is stijgend (dat behoeft je niet aan te tonen).

- a) Ga na dat de rij een limiet bezit en bepaal deze. 8
b) Toon aan dat de rij begrensd is; geef een beneden- en een bovengrens. 4

2. Stel van elke van de volgende reeksen vast of ze divergent, relatief (*conditionally*) convergent of absoluut convergent is, en vermeld het kenmerk dat je gebruikt:

- a) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{3n+1}$; 6
b) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)3^n}{2^{2n+1}}$; en 10
c) de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \sin((n+\frac{1}{2})\pi) \frac{1}{n+1}$. 8

3. Gegeven is de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$.

Bepaal de convergentiestraal R en het convergentie-interval I van deze reeks. 10

4. Laat $f(x) = x \cos(\frac{1}{2}x^2)$.

- a) Bepaal de Maclaurinreeks van f (gebruik het formuleblad). 8

- b) Bepaal hiermee de Maclaurinreeks van g als $g(x) = \int_0^x f(t) dt$. 6

Welke convergentiestraal heeft de machtreeks voor g ?

BONUS Door middel van een substitutie is $g(x)$ analytisch te bepalen.

Controleer dat de Maclaurinreeks van de door integratie gevonden functie g overeenstemt met die uit het tweede onderdeel. 4

5. Bereken met behulp van standaard-machtreeksontwikkelingen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} + \sin x}{x \ln(1+x^2)} . \quad 10$$

6. Gegeven is de functie $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^2$ en

$$F(x, y) = \ln \frac{y}{x} - 2x^3y .$$

a) Bepaal het (maximale) domein D van F . 2

b) Bereken de volgende (drie) partiële afgeleiden van F : 6

$$\frac{\partial F}{\partial x} , \frac{\partial F}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} .$$

7. Laat D het vlakstuk zijn dat is ingesloten tussen de lijnen $x = 0$, $y = 1 - x$ en $y = x - 1$.

a) Schets D . 2

b) Bereken $\iint_D (x + y^3) \, dA$. 10

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.

Bij n gescoorde punten ($10 \leq n \leq 100$) is het cijfer $c = \frac{n}{10}$ (afgerond, $1 \leq c \leq 10$).

10