

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 100 TI
 30 januari 2012, 09.00–11.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
 Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Je mag het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** gebruiken.*

*Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn **niet** toegestaan.*

Voorzie elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.

1. Gegeven is de rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (Stewart: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$) met $a_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

- a) Ga na of de rij monotoon (dalend of stijgend) is.

4

Omdat $a_2 = \frac{1}{4} \sin^2 2 \approx 0,2067 > a_3 = \frac{1}{9} \sin^2 3 \approx 0,0022 < a_4 = \frac{1}{16} \sin^2 4 \approx 0,0358$ kan de rij noch stijgend, noch dalend zijn.

[of:] Als $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ is $f'(x) = \frac{x^2 \cdot 2 \sin x \cos x - 2x \cdot \sin^2 x}{x^4} = \frac{2 \sin x}{x^3} (x \cos x - \sin x)$, en deze functie wisselt van teken (niet eenvoudig te bewijzen).

[of:] Als $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ is $g'(x) = \frac{x \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x}{x^2}$; deze afgeleide is negatief tot voorbij $x = 4$, dus g daalt op het interval $[1, 4]$; op $[1, \pi]$ is $g(x) \geq 0$, en daalt dus $f(x) = g^2(x)$; op $[\pi, 4]$ is $g(x) \leq 0$, en stijgt dus $f(x) = g^2(x)$.^a

N.B.: dit onderdeel was lastiger dan voorzien. § 11.1

^adeze laatste redenering is niet helemaal sluitend

- b) Toon aan dat de rij begrensd is.

4

Omdat $0 \leq \sin^2 n \leq 1$ en $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$ geldt: $0 = 0 \cdot 0 \leq \sin^2 n \cdot \frac{1}{n^2} \leq 1 \cdot \frac{1}{n^2} \leq 1$, en is de rij begrensd (naar beneden door 0 en naar boven door 1). § 11.1

- c) Ga na of de rij een limiet heeft. Zo ja, bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6

Daar $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ volgt met de insluitstelling dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$: de rij heeft dus een limiet. § 11.1

2. Stel van elke van de volgende reeksen vast of ze divergent, relatief (*conditionally*) convergent of absoluut convergent is, en vermeld het kenmerk dat je gebruikt:

- a) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2n}$;

6

De reeks is divergent, want $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2}n + 1 + \frac{1}{2n}) = \infty \neq 0$; pas nu het nulkenmerk (*test for divergence*) toe. § 11.6

b) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{n^2}$; en

6

Omdat $0 \leq \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{n^2} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ en $(\frac{\pi}{2})$ maal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is ($p = 2$) is volgens het majorante-minorantekenmerk (het vergelijkingskenmerk) de gegeven reeks eveneens convergent; alle termen zijn positief, dus de convergentie is absoluut.

[of:] Met het limietkenmerk kan het ook: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{n} \stackrel{\text{arcsin continu}}{=} \arcsin \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \arcsin 0 = 0$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent (en louter positieve termen).

[of:] Vergelijken met $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ kan ook: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \stackrel{x=\arcsin \frac{1}{n}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\sin x} = 1$. § 11.4 / 11.5

c) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 - 2n^2 + 2}{n^4 - 2n^3 + 4}$.

8

De reeks is niet absoluut convergent: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-1)^n \frac{n^3 - 2n^2 + 2}{n^4 - 2n^3 + 4}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 + 2n}{n^4 - 2n^3 + 4} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^4}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^3}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 1$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent (harmonische reeks, $p = 1$).

[of:] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n^3 + 2n}{n^4 - 2n^3 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n - 4}{n^4 - 2n^3 + 4} \right) = \dots = 1 + 0$.

De reeks is wel convergent, want zij is alternerend (voor alle n is $\frac{n^3 - 2n^2 + 2}{n^4 - 2n^3 + 4} > 0$!),
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 2}{n^4 - 2n^3 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^4 - 2n^3 + 2n}{n^4 - 2n^3 + 4} = 0 \cdot 1 = 0$ en $\frac{n^3 - 2n^2 + 2}{n^4 - 2n^3 + 4}$ is op den duur (voor grote n) dalend: deze rationale functie gedraagt zich als $\frac{1}{n}$.^a

Het kenmerk van Leibniz voor alternerende reeksen doet de rest.

We stellen vast dat de reeks relatief convergent moet zijn.

§ 11.2

^adifferentiatie (bewerkelijk) levert een afgeleide die steeds negatief is, behalve kortstondig op $(1, 2]$; deze complicatie was niet bedoeld

3. Gegeven is de volgende machtreeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

a) Bepaal van de reeks de convergentiestraal R en het convergentie-interval I . 10

We passen het verhoudingskenmerk van D'Alembert toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x-1| \cdot \frac{n}{n+1} = |x-1|.$$

Dit duidt op een convergentie-interval rond 1. De convergentiestraal bedraagt $R = 1$.

Randonderzoek:

$$x = 0 \text{ invallent levert } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

dus divergent: het tegengestelde van de harmonische reeks; en

$$x = 2 \text{ invallent levert } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

dus (relatief) convergent: de alternerende harmonische reeks.

We stellen vast dat $I = (0, 2]$.

§ 11.9

- b) Noem de somfunctie van de machtreeks $s : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Volgens de theorie is s in het inwendige van I differentieerbaar naar x .

6

Geef de bijbehorende machtreeksontwikkeling van $s'(x)$.

We mogen (op het inwendige van I) termsgewijze differentiëren:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(x-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n. \quad \S 11.9$$

- c) [BONUS] Welke functie herken je in deze laatste machtreeksontwikkeling? 4
Welke functie werd dus gerepresenteerd door de eerste machtreeks?

De gevonden machtreeks is een meetkundige reeks met reden $1-x$ en eerste term 1 ; de som bedraagt $\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$.

Dan moet $s(x) = \int_1^x s'(t) dt = \ln|x|$ zijn. Een rechtstreekse Taylorontwikkeling van $\ln x$ in $a = 1$ bevestigt dat, maar $1+x = u$ nemen in de Maclaurinontwikkeling van $\ln(1+x)$ volstaat ook om de reeksontwikkeling te verkrijgen (niet uitgewerkt). $\S 11.9$

4. Bereken met behulp van machtreeksontwikkelingen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2}.$$

10

Gebruikmakend van standaardontwikkelingen (tot en met de term van orde x^3 nodig):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2e^x - 2 - 2x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) \right) - \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + O(x^5) \right)}{2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4) \right) - 2 - 2x - x^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{6}x^3 + \frac{8}{6}x^3 + O(x^5)}{\frac{2}{6}x^3 + O(x^4)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{3} + O(x)} = 3. \end{aligned} \quad \S 11.10$$

^aN.B. deze som zat ook in het tentamen over deel I van 27 januari; het is hier uitdrukkelijk de bedoeling machtreeksontwikkelingen te gebruiken

5. Gegeven is de functie $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ met $D \subset \mathbb{R}^3$ en

$$F(x, y, z) = x \arctan(yz) - z \ln(x - y).$$

Bereken de (drie) eerste-orde partiële afgeleiden van F .

10

- $F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 1 \cdot \arctan(yz) - z \cdot \frac{1}{x-y} \cdot 1 = \arctan(yz) - \frac{z}{x-y};$
- $F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{1+(yz)^2} \cdot z - z \cdot \frac{1}{x-y} \cdot -1 = \frac{xz}{1+y^2z^2} + \frac{z}{x-y}$ en
- $F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = x \cdot \frac{1}{1+(yz)^2} \cdot y - 1 \cdot \ln(x-y) = \frac{xy}{1+y^2z^2} - \ln(x-y).$

$\S 14.3$

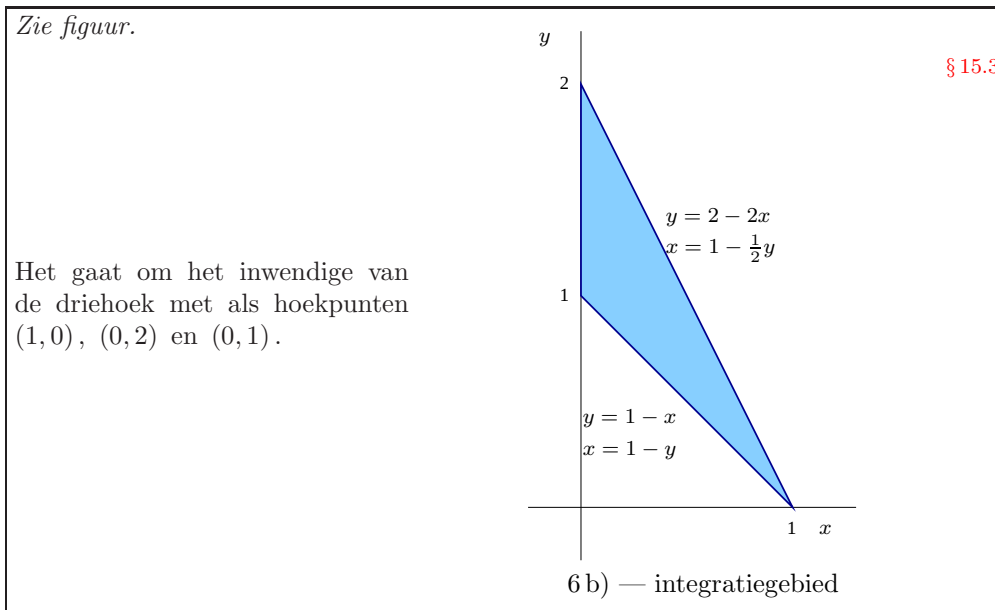
6. a) Bereken $\int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} 3x^2y \, dy \, dx.$

10

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} 3x^2y \, dy \, dx &= \int_0^1 3x^2 \cdot \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{1-x}^{2-2x} dx = \int_0^1 \frac{9}{2} (x^4 - 2x^3 + x^2) dx = \\ \left[\frac{9}{10}x^5 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3 \right]_0^1 &= \frac{3}{20}. \end{aligned} \quad \S 15.3$$

b) Teken het integratiegebied.

4



c) Verwissel in de integraal de integratievolgorde (opschrijven, *niet* uitrekenen). 6

Omdat voor x afhankelijk van de waarde van y verschillende ondergrenzen volgen dient de integraal te worden gesplitst; we vinden (zie figuur) (stelling van Fubini):

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} 3x^2 y \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{1-y}^{1-\frac{1}{2}y} 3x^2 y \, dx \, dy + \int_1^2 \int_0^{1-\frac{1}{2}y} 3x^2 y \, dx \, dy.$$

§ 15.3

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.

Bij n gescoorde punten ($10 \leq n \leq 100$) en q als resultaat van de quizzen voor deel 2 ($0 \leq q \leq 1$) is het cijfer $c = \frac{n}{10} + q$ (afgerond, $1 \leq c \leq 10$).

10