Technische Universiteit Delft – Toegepaste Wiskunde
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Mekelweg 4, 2628 CD DELFT

TU Delft

# tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 100 TI / wi 1 005 In
# 24 januari 2011, 10.00–12.00 uur

***Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.***
***Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.***
*Je mag het* ***formuleblad*** *van het* instellingspakket *en een* ***rekenmachine*** *gebruiken.*
*Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn* ***niet*** *toegestaan.*
*Voorzie elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.*

1. Gegeven is de *rij* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (*Stewart*: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$) met $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

   a) Bereken $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ en bewijs daarmee dat de rij dalend is. 6

   b) Geef zo mogelijk een beneden- en een bovengrens van de rij. 4

   c) Leg uit dat de rij een limiet heeft. Bepaal $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. 6

2. Stel van elk van de volgende reeksen vast of ze divergent, relatief (*conditionally*) convergent of absoluut convergent is, en vermeld het kenmerk dat je gebruikt:

   a) de *reeks* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (zie ook som 1); 6

   b) de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\pi^n}$; en 8

   c) de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} - n + 2}{n^{\frac{4}{3}} - 2n + 4}$. 6

3. Gegeven is de functie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ met $f(x) = \ln x$.

   a) Bepaal door *rechtstreekse* berekening de eerste *vier* van 0 verschillende termen van de Taylorreeks van $f$ rond $a = 1$. 10

   b) Verklaar hoe het komt dat het resultaat zo sterk lijkt op de Maclaurinreeks van $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $g(x) = \ln(1 + x)$. 4
   Hoe kan de eerste reeks worden verkregen uit de tweede?

4. Van een zekere functie $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is een reeksontwikkeling bepaald. Er geldt:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

a) Laat met behulp van standaard-reeksontwikkelingen zien dat $s(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$. 10

b) Bepaal de Maclaurinontwikkeling van $s'(x)$. 6

5. Geef een vergelijking aan het raakvlak in het punt $P\,(1,0,1)$ aan de grafiek van $z = x\,\mathrm{e}^{y}$. 6

6. Laat zien dat $u(t,x) = \mathrm{e}^{-\alpha^2 k^2 t}\sin(kx)$ (voor elke constante $k$) een oplossing is van de partiële differentiaalvergelijking 8

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

7. Bereken $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^4}\,\mathrm{d}A$ als $D$ het driehoekige gebied is tussen de hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(1,1)$. 10

Normering

*Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.*
*Bij* $n$ *gescoorde punten* $(10 \le n \le 100)$ *en* $q$ *als resultaat van de quizzen voor deel* 2 $(0 \le q \le 1)$ *is het cijfer* $c = \frac{n}{10} + q$ (afgerond, $1 \le c \le 10$). 10