

tentamen Analyse (deel 2) – wi 1 100 TI / wi 1 005 In

4 april 2011, 10.00–12.00 uur

*Deelname aan dit tentamen is voorbehouden aan wie zich hebben opgegeven.
 Zo nodig wordt je werk onbeoordeeld terzijde gelegd.*

*Je mag het **formuleblad** van het instellingspakket en een **rekenmachine** gebruiken.*

*Onderling contact en het gebruik van communicatieapparatuur zijn **niet** toegestaan.*

Voorzie elk antwoord dient van een deugdelijke argumentatie en geef exacte antwoorden.

1. Gegeven is de rij $(a_n)_{n=0}^\infty$ (Stewart: $\{a_n\}_{n=0}^\infty$) met $a_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n+1}$.
 - a) Is de rij dalend of stijgend, dan wel geen van beide? 4
 - b) Geef zo mogelijk een beneden- en een bovengrens van de rij. 4
 - c) Ga na of de rij een limiet heeft. Bepaal in dat geval $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. 6

2. Stel van elk van de volgende reeksen vast of ze divergent, relatief (*conditionally*) convergent of absoluut convergent is, en vermeld het kenmerk dat je gebruikt:
 - a) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\sqrt{n} + n - \sqrt{n}}{2n^{\frac{8}{3}} - \sin n}$; 8
 - b) de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n}$; en 8
 - c) de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{81^{\frac{3}{2}n}}{512^{\frac{4}{3}n}}$. 6

3. Gegeven is de volgende machtreeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$
 - a) Bepaal van de reeks de convergentiestraal R en het convergentie-interval I . 10
 - b) Noem de somfunctie van de machtreeks $s : I \rightarrow \mathbb{R}$.
 Volgens de theorie is s in het inwendige van I differentieerbaar naar x . 8
 Geef de bijbehorende machtreeksontwikkeling van $s'(x)$.
 - c) [BONUS] Welke functie herken je in deze laatste machtreeksontwikkeling? 4
 Welke functie werd dus gerepresenteerd door de eerste machtreeks?



4. Bepaal met behulp van machtreeksontwikkelingen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}. \quad 10$$

5. Gegeven is de functie $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $u(x, y, z) = xy \arcsin(yz)$.

a) Bepaal het (maximale) domein I van deze functie. 4

b) Bereken alle eerste-orde partiële afgeleiden van u . 6

c) Bereken u_{yx} . 4

6. Bereken $\iint_D \frac{y}{1+x^5} dA$ 12

met D het gebied ingesloten tussen de x -as, de lijn $x = 1$ en de parabool $y = x^2$.

Normering

Elk onderdeel levert maximaal het in de kantlijn vermelde aantal punten.

Bij n gescoorde punten ($10 \leq n \leq 104$) is het cijfer $c = \frac{n}{10}$ (afgerond, $1 \leq c \leq 10$). 10

1. a) Het begin van de rij luidt: $(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{10}, -\frac{\sqrt{3}}{12}, 0, \frac{\sqrt{3}}{16}, \dots)$. 4

Uit $a_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3} > 0 = a_0$ blijkt dat de rij niet dalend is, en
uit $a_2 = \frac{1}{6}\sqrt{3} < \frac{1}{4}\sqrt{3} = a_1$ blijkt dat de rij evenmin stijgend is.

- b) Omdat $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{3} \leq 1$ en $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$ geldt dat $-1 \leq a_n < 1$,
wat aantoont dat de rij een benedengrens -1 en een bovengrens 1 bezit. 4

Opmerking: de scherpste benedengrens is $-\frac{1}{10}\sqrt{3}$ en de scherpste bovengrens is $\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

- c) Met de afschattingen uit het vorige onderdeel blijkt dat $-\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n+1}$. 6
Omdat $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n+1} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$ volgt met de insluitstelling: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

2. a) [Voor grote waarden van n gedraagt de teller zich als $n^{\frac{8}{3}}$ en de noemer als $n^{\frac{8}{3}}$.
Dat brengt ons tot vergelijking van deze reeks met $\sum \frac{1}{n^{\frac{8}{3}}}$]

Alle termen van de reeks zijn positief; gebruik hier het *limietkenmerk*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n\sqrt{n} + n - \sqrt{n}}{2n^{\frac{8}{3}} - \sin n}}{\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{\frac{8}{3}} + n^{\frac{13}{6}} - n^{\frac{5}{3}}}{2n^{\frac{8}{3}} - \sin n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + n^{-\frac{1}{2}} - n^{-1}}{2 - \frac{\sin n}{n^{\frac{8}{3}}}} = \frac{3+0-0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ is convergent ($p = \frac{7}{6} > 1$); we stellen vast: de reeks is absoluut 8
convergent.

Opmerking: van de andere kenmerken is alleen het majorante-minorantekenmerk
(edoch met moeite) bruikbaar.

- b) We gaan eerst na of de reeks absoluut convergent is. Dat blijkt het geval.

Voor toepassing van het *integraalkenmerk* bekijken we $f(x) = xe^{-x}$ ($x \geq 1$):

- f is continu;
- $f'(x) = (1-x)e^{-x} \leq 0$ indien $x \geq 1$; de functie f daalt dus; en
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ (standaardlimiet).

Bereken $\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} xe^{-x} dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} [-xe^{-x} - \int -e^{-x} dx]_1^{\infty} = [-(x+1)e^{-x}]_1^{\infty} =$
 $0 - -2e^{-1} = \frac{2}{e}$. De oneigenlijke integraal is convergent, dus de reeks ook; die
is blijkbaar absoluut convergent.

[of:] Omdat $0 < n < e^{\frac{1}{2}n}$ (n groot; vergelijk $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{\frac{1}{2}n}} = 0$) geldt $0 < ne^{-n} < e^{-\frac{1}{2}n}$.

Nu is $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$ convergent (meetkundige reeks met $r = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$).

Het *majorante-minorantekenmerk* wijst ons nu de weg naar de conclusie dat 8
de oorspronkelijke reeks absoluut convergent is.

[of:] We kunnen de reeks ook vergelijken met de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ne^{-n}}{\frac{1}{n^2}} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{e^n} = 0$ en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is convergent (p -reeks met $p = 2 > 1$), dus zegt
het *limietkenmerk* dat de gegeven reeks absoluut convergent is.



[of:] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)e^{n+1}}{(-1)^n n e^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{e^{n+1}}{e^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot e = e > 1$;
het *verhoudingskenmerk* van D'Alembert geeft: de reeks is absoluut convergent.

[of:] Uit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n e^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot e = 1 \cdot e = e > 1$ volgt met het *wortelkenmerk* van Cauchy: de reeks is absoluut convergent.

c) Omdat $\frac{81^{\frac{3}{2}n}}{512^{\frac{4}{3}n}} = \left(\frac{81^{\frac{3}{2}}}{512^{\frac{4}{3}}}\right)^n$ hebben we een *meetkundige* reeks met reden
 $r = \frac{81^{\frac{3}{2}}}{512^{\frac{4}{3}}} = \frac{9^3}{8^4} = \frac{729}{4096} < 1$; de reeks is dus absoluut convergent. 6

[of:] De kenmerken van *d'Alembert* en *Cauchy* zijn eenvoudig toe te passen.

3. a) We passen het kenmerk van d'Alembert toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot |x-1| =$$

$$1 \cdot |x-1| = 1 \text{ als } |x-1| = 1 \implies R = \frac{1}{1} = 1.$$

$|x-1| = 1$ als $x = 0$ of $x = 2$. We onderzoeken deze randpunten: 10

- $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, het tegengestelde van de harmonische reeks, dus *divergent*; en
- $x = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, de *relatief convergente* alternerende harmonische reeks.

We leiden hieruit af dat $I = (0, 2]$.

[of:] Als je meteen ziet dat de reeks voor $x = 2$ relatief convergent is weet je dat 2 een randpunt is, en daarmee ineens dat $R = 1$.

b) $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \implies s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x-1)^{n-1}.$ 8

c) We hebben een meetkundige reeks met $r = -(x-1)$ — schuif de index één op, dus neem $m = n-1$, dan komt er $s'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (1-x)^m = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}.$ 4

Dus is $s(x) = \int_1^x s'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^x \stackrel{x \geq 0}{=} \ln x.$ [BONUS]

[of:] De reeks voor $s(x)$ is ook te herkennen aan de hand van de machtreeksontwikkeling van $\ln(1+x)$ op het formuleblad:

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} \stackrel{y=x-1}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = s(x) \implies$$

$$s(x) = \ln(1+(x-1)) = \ln x.$$



$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}{1 + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)}{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + O(x^2)}{-1 + O(x)} = \frac{1 + 0}{-1 + 0} = -1. \quad 10$$

Opmerking: dit is Stewart, 6th ed., § 11.10, 56)

5. a) u is een functie van drie veranderlijken: het domein is een deelverzameling van $\mathbb{R}^3$. De enige beperking die moet worden aangelegd is dat het argument van de arcsin tussen -1 en 1 moet liggen. We hebben dus 4
- $$I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq yz \leq 1\}.$$

b) $u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = y \arcsin(yz), \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = x \arcsin(yz) + xy \frac{1}{\sqrt{1 - (yz)^2}} \cdot z, \text{ en} \quad 6$

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial z} = xy \frac{1}{\sqrt{1 - (yz)^2}} \cdot y.$$

c) $u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \arcsin(yz) + \frac{xyz}{\sqrt{1 - (yz)^2}} \right)$

$$= \arcsin(yz) + \frac{yz}{\sqrt{1 - (yz)^2}} \quad (= u_{xy}). \quad 4$$

6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ leidt tot

$$\iint_D \frac{y}{1 + x^5} dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{1 + x^5} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{\frac{1}{2}y^2}{1 + x^5} \right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}x^4}{1 + x^5} dx \stackrel{u=1+x^5}{=} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u} \cdot \frac{1}{5} du = \left[\frac{1}{10} \ln |u| \right]_1^2 = \frac{1}{10} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{10} \ln 2. \quad 12$$

[of:] $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \sqrt{y} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ levert schier onoplosbare problemen:

$$\iint_D \frac{y}{1 + x^5} dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{1 + x^5} dx dy; \text{ primitiveren van } \frac{1}{1 + x^5} \text{ is te moeilijk.}$$