

Hertentamen Analyse 1 (wi1600)
Dinsdag 10 april 2012; 09.00 - 12.00 uur

*Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij dit tentamen **niet** toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine wel.*

Elke vraag heeft hetzelfde gewicht en per vraag heeft ieder onderdeel hetzelfde gewicht.

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})\sqrt{x}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x \cos x}{x^3}.$

2. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende definitie af:

Definitie. Zij $D \subset \mathbb{R}$, en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Laat $c \in D$. We noemen f *continu* in c als er voor iedere een bestaat zodanig dat

voor alle met:

- (b) Laat $a \in \mathbb{R}$, en laat de functie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| \tan \frac{\pi}{2}x, & \text{als } 0 < x < 1 \\ ax^2 + 2x - 2, & \text{als } x \geq 1. \end{cases}$$

Voor welke a is f continu in $x = 1$?

3. Laat de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \begin{cases} x + e^x & \text{als } x \leq 0 \\ x - e^{-x}, & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Bepaal de limiet $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Is f differentieerbaar in $x = 0$?

- (b) Bewijs de volgende stelling:

Stelling: Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Neem aan dat de functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een maximum aanneemt in een punt $x_0 \in (a, b)$. Als f differentieerbaar is in x_0 , dan geldt er dat $f'(x_0) = 0$.

4. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende Stelling af:

Stelling (Middelwaardestelling). Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn die is op (a, b) . Dan bestaat er een $\xi \in (a, b)$ waarvoor geldt

$$\dots\dots\dots = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}.$$

- (b) Toon aan¹ dat $\tan x > x$ voor $0 < x \leq \pi/2$.
5. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu en neem aan dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Toon aan, dat als

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0,$$

er geldt dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in [a, b]$.

6. Bereken de volgende onbepaalde integralen:

(a) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx.$

(b) $\int \frac{1}{e^x + 1} \, dx.$

7. Geef aan of de onderstaande oneigenlijke integralen convergeren of divergeren, en laat ook zien waarom u dat denkt.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} \, dx.$

(b) $\int_1^\infty e^{-x^2} \, dx.$

8. (a) Bepaal² voor de volgende machtreeks het convergentie-interval en geef voor alle punten van het convergentie-interval aan of de machtreeks daar convergeert of absoluut convergeert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$$

- (b) Wat is de som van deze machtreeks voor de waarden van x waarvoor zij convergeert? Wat is dan de som van de reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}?$$

9. De functie f , voor $x \in \mathbb{R}$ gegeven door:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

is een belangrijke functie uit de Kansrekening.

- (a) Toon aan dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx = 0.$$

- (b) Bepaal³ de Maclaurin reeks van f .

EINDE

¹Hint: dit kan mbv. de Middelwaardstelling, maar een ander correct bewijs is natuurlijk ook goed.

²U mag op dit tentamen gebruiken dat $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ als $-1 < x < 1$.

³U mag op dit tentamen gebruiken dat $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.