

Tentamen Analyse 1 (wi1600)
Donderdag 24 januari 2012; 14.00 - 17.00 uur

*Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij deze toets **niet** toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine wel.*

Elke vraag heeft hetzelfde gewicht en per vraag heeft ieder onderdeel hetzelfde gewicht.

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x}{2(x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \tan(4x)}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(3x)}{3x} \cdot \frac{4 \tan(4x)}{4x} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6,$$

omdat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \tan(4x)}{4x} = 4 \cdot 1 = 4.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \sin x + \sqrt{3x^5 + 2}}{(5 - 4x + x^3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \sqrt{\frac{3x^5 + 2}{x^6}}}{\frac{5}{x^3} - \frac{4}{x^2} + 1}$$

en omdat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2}{x^6} = 0, \quad \frac{5}{x^3} = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

zien we dat voor grote x er geldt dat:

$$\frac{x^3 \sin x + \sqrt{3x^5 + 2}}{(5 - 4x + x^3)}$$

zich zal gedragen als $\sin x \dots$ en hebben we dus **geen** convergentie als $x \rightarrow \infty$.

2. Toon aan met behulp van de **definitie van afgeleide** dat¹ de functie $f : (2, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}, \quad \text{als } x > 2,$$

differentieerbaar is op $(2, \infty)$. Wat is dan de afgeleide $f'(x)$ voor $x \in (2, \infty)$?

Oplossing: Laat $x \in (2, \infty)$, dan is f differentieerbaar in x als de limiet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

¹Dus **niet** met behulp van de rekenregels van afgeleiden!

bestaat. Welnu, er geldt dat:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(x-2) - (x+h-2)}{(x-2)(x+h-2)} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h}{(x-2)(x+h-2)} \right) \\
 &= \frac{-1}{(x-2)^2}.
 \end{aligned}$$

We zien dus dat de limiet bestaat en eindig is, en we concluderen dus dat f differentieerbaar is op $(2, \infty)$, met afgeleide

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

3. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende definitie af:

Definitie. Laat $D \subset \mathbb{R}$, en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn en zij $c \in \mathbb{R}$. Neem aan dat c een **verdichtingspunt** van D is. We noemen een reëel getal L de limiet van f in c indien er voor iedere $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat

$$\text{voor alle } x \in D \text{ met } 0 < |x - c| < \delta : \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- (b) Definieer de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Toon aan dat f continu is in $x = 0$. Is f differentieerbaar in $x = 0$? Leg uit waarom wel/niet.

Oplossing: Merk op, dat als $x \in (-1, 1)$, er geldt dat

$$x^2 \leq x < 1 \quad (\text{en gelijkheid geldt alleen als } x = 0).$$

Laat $\varepsilon > 0$. Kies dan $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$, dan geldt er als $|x - 0| < \delta$ dat

$$|f(x) - 0| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \min\{\varepsilon, 1\} \leq \varepsilon;$$

dus f is continu in $x = 0$. Als x differentieerbaar zou zijn in $x = 0$ met afgeleide $f'(0)$, dan zou voor elke rij $(a_n)_{n \geq 0}$ in $\mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$ voor $n \geq 0$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ gelden dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n + 0) - f(0)}{a_n} = f'(0).$$

Neem eerst $a_n = \frac{1}{n+1}$, dan geldt er dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n + 0) - f(0)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - 0}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

dus $f'(0) = 0$. Echter, als $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ met $a_n \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, dan geldt er:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n + 0) - f(0)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 0}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

en zouden wij dus concluderen dat $f'(0) = 1$. Omdat $f'(0)$ niet tegelijkertijd 0 en 1 kan zijn vinden we dus een **tegenspraak**; de aanname dat f differentieerbaar is in 0 is onjuist.

4. Laat k de kromme in $\mathbb{R}^2$ zijn, gegeven door de vergelijking

$$xe^{y-1} + y^2 = 4.$$

Bepaal dan de raaklijn ℓ aan k in het punt $(3, 1)$.

Oplossing: Om de raaklijn uit te rekenen aan de kromme k in het punt $(3, 1)$ is het voldoende om de richtingscoëfficiënt van deze raaklijn te weten in $(3, 1)$; een lijn wordt immers geheel bepaald door de richtingscoëfficiënt en één punt dat op die lijn ligt. Om deze richtingscoëfficiënt te bepalen differentieren we k links en rechts naar x (en bedenk dat $y = y(x)$; y is een functie van x !). Dit geeft:

$$e^{y-1} + xe^{y-1}y' + 2yy' = 0,$$

waaruit volgt dat:

$$(xe^{y-1} + 2y)y' = -e^{y-1}.$$

We vinden dus dat:

$$y' = \frac{-e^{y-1}}{xe^{y-1} + 2y}.$$

In het punt $(3, 1)$ zien we dus dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan:

$$\frac{-e^{1-1}}{3e^{1-1} + 2} = \frac{-1}{3 + 2} = \frac{-1}{5}.$$

Maar dan wordt de raaklijn aan k in $(3, 1)$ gegeven door:

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}.$$

5. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende stelling af:

Stelling. (Hoofdstelling van de Integraalrekening) *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu, en definieer de functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

Dan is F differentieerbaar en voor alle $x \in [a, b]$ geldt $F'(x) = f(x)$.

- (b) Laat de functie $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin(\ln \sqrt{t})}{t} \, dt, \quad \text{als } x \geq 1.$$

Bepaal de afgeleide $f'(x)$ van f voor $x > 1$.

Oplossing: Er zijn verschillende manieren om dit op te lossen. We geven hier twee manieren (één is voldoende op het tentamen, natuurlijk!).

Eerste manier: Laat $G(x)$ een primitieve van

$$g(x) = \frac{\sin(\ln \sqrt{x})}{x}$$

zijn, dan geldt er dat

$$f(x) = [G(t)]_{t=1}^{t=x^2} = G(x^2) - G(1).$$

Maar dan volgt er uit de *kettingregel* direct dat (en bedenk dat $G'(x) = g(x)$ en $G'(1) = 0$):

$$f'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = 2xg(x^2) = 2x \cdot \frac{\sin(\ln \sqrt{x^2})}{x^2} = \frac{2 \sin(\ln x)}{x}.$$

Tweede manier: We kunnen de primitieve G natuurlijk ook uitrekenen!

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^{x^2} \frac{\sin(\ln \sqrt{t})}{t} dt \\ &= \int_1^{x^2} \frac{\sin(\frac{1}{2} \ln t)}{t} dt \\ &= \left[-2 \cos\left(\frac{1}{2} \ln t\right) \right]_1^{x^2} \\ &= -2 (\cos(\ln x) - \cos 0) \\ &= -2 \cos(\ln x) + 2. \end{aligned}$$

Maar dan zien we direct dat:

$$f'(x) = \frac{2 \sin(\ln x)}{x}.$$

6. Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

(a) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$

Oplossing: De oplossing is het snelste gevonden met de *substitutie-methode*: zet $u = \cos x$, dan is

$$\frac{du}{dx} = -\sin x,$$

zodat

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{-1}{u^2} du = \frac{1}{u} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Het kan ook anders! Zet $F(x) = \sin x$ en $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, en laat $f(x) = F'(x)$ en $g(x) = G'(x)$. *Partieel integreren* geeft nu dan dat:

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx + C.$$

Hier geeft dit:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx &= \int (\sin x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
 &= (\sin x)(\tan x) - \int (\cos x)(\tan x) dx \\
 &= (\sin x)(\tan x) - \int (\cos x) \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
 &= (\sin x)(\tan x) - \int \sin x dx \\
 &= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x + C \\
 &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} + C \\
 &= \frac{1}{\cos x} + C.
 \end{aligned}$$

(b) $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx.$

Oplossing: Nu is *partieel integreren* wel de eenvoudigste aanpak: zet $f(x) = 1$ en $G(x) = \ln(1+x^2)$ (en $f(x) = F'(x)$ en $g(x) = G'(x)$). Dan geldt er dat:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \ln(1+x^2) dx &= \int_0^1 1 \cdot \ln(1+x^2) dx \\
 &= [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx \\
 &= \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx.
 \end{aligned}$$

Apart:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
 &= 1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\
 &= 1 - [\arctan x]_0^1 \\
 &= 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \\
 &= 1 - \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Invullen geeft dan dat:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

7. Geef aan of de onderstaande oneigenlijke integralen convergeren of divergeren, en laat ook zien waarom u dat denkt.

(a) $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx.$

Oplossing: Merk eerst op, dat

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$$

een ‘keurige’ (convergente) integraal is. We hoeven dus alleen maar

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$$

te onderzoeken! Voor $x \geq 1$ is $1+x \geq 1$, en dus geldt er dat:

$$\frac{1}{1+x} \leq 1.$$

Omdat $e^{-x^2} > 0$ volgt er dan direct dat

$$\frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq e^{-x^2}.$$

Verder geldt er voor $x \geq 1$ dat $x^2 \geq x$, zodat $-x^2 \leq -x$, en dus dat $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Tezamen geeft dit:

$$\frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq e^{-x}.$$

Laat nu $R > 1$ zijn. Dan geldt er dat

$$\int_0^R \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \int_0^R e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^R = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^R}.$$

Maar dan is

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^R} \right) = \frac{1}{e}.$$

De integraal is dus **convergent**!

(b) $\int_0^1 \frac{1 + \cos(x^2)}{\sqrt{x}} dx.$

Oplossing: Voor $x \in \mathbb{R}$ geldt er dat: $1 + \cos(x^2) \leq 2$, dus voor $x > 0$ vinden we:

$$\frac{1 + \cos(x^2)}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Laat nu $c \in (0, 1)$, dan geldt er dat:

$$\int_c^1 \frac{1 + \cos(x^2)}{\sqrt{x}} dx \leq \int_c^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = [4\sqrt{x}]_c^1 = 4 - 4\sqrt{c} \rightarrow 4$$

als $c \downarrow 0$. De integraal is dus **convergent**!

8. (a) Bepaal voor de volgende machtreeks het convergentie-interval en geef voor alle punten van het convergentie-interval aan of de machtreeks daar convergeert of absoluut convergeert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} x^n.$$

Oplossing: er geldt dat

$$a_n = \frac{2^n n^2}{3^n}, \quad \text{voor } n \geq 0,$$

en dan weten we dat de convergentiestraal R voldoet aan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{2^n n^2}{3^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n n^2} \cdot \frac{2^{n+1}(n+1)^2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

en dus is $R = 3/2$. Omdat $c = 0$ (het ‘centrum’ van de machtreeks-ontwikkeling) zien we dus dat als $|x| < 3/2$ de machtreeks absoluut convergeert. We moeten de gevallen $x = \pm 3/2$ apart bekijken:

→ als $x = -3/2$, dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2,$$

en deze reeks is divergent.

→ als $x = 3/2$, dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2,$$

en deze reeks is ook divergent. Als $|x| > R = 3/2$ weten we dat de machtreeks divergent is.

- (b) Wat is de som van deze machtreeks voor de waarden van x waarvoor zij convergeert?

Oplossing: merk op, dat

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}x\right)^n \quad \left(\text{zet } t = \frac{2}{3}x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n, \end{aligned}$$

waarbij deze laatste machtreeks (dus) convergentiestraal 1 heeft.

We weten dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad (\text{als } |t| < 1),$$

dus links en rechts differentieren naar t geeft:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2},$$

zodat als we links en rechts met t vermenigvuldigen we vinden dat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^n = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Als we nu opnieuw links en rechts differentiëren naar t vinden we:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1} &= \frac{(1-t)^2 + 2t(1-t)}{(1-t)^4} \\ &= \frac{(1-t) + 2t}{(1-t)^3} \\ &= \frac{1+t}{(1-t)^3}. \end{aligned}$$

Er volgt dus, dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^n = \frac{t + t^2}{(1-t)^3}.$$

Invullen van $t = \frac{2}{3}x$ geeft dan dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} x^n = \frac{12x^2 + 18x}{(3-2x)^3},$$

als $|x| < 3/2$.

9. Laat de functie f voor $x \in \mathbb{R}$ gegeven zijn door:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Deze integraal is niet uit te drukken in de bekende functies, maar wel met machtreeksen. Bepaal de Maclaurin reeks voor de functie f .

Oplossing: bedenk dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ er geldt dat:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

waaruit dan direct volgt dat:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n},$$

zodat

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

EINDE