

Tentamen Analyse 1 (wi1600)
Donderdag 27 januari 2012; 09.00 - 12.00 uur

*Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij deze toets **niet** toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine wel.*

Elke vraag heeft hetzelfde gewicht en per vraag heeft ieder onderdeel hetzelfde gewicht.

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{3x-2}(5+\sqrt{3x-2})}{5-4x+x^2}.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2|^2 - 3x + 1}{x+1-|x-1|}.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}.$

2. Toon aan met behulp van de definitie van afgeleide dat de functie $f : (-6, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, gedefinieerd door $f(x) = \sqrt{x+6}$, differentieerbaar is op $(-6, \infty)$ met afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}.$$

3. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende stelling af:

Stelling (Middelwaardestelling) *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie die is op (a, b) . Dan bestaat er een $\xi \in \dots\dots\dots$ waarvoor geldt:*

$$f'(\dots) = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}.$$

- (b) Laat $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$ en laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn zoals in de Middelwaardestelling hierboven. Veronderstel verder dat er een $C \in \mathbb{R}$ bestaat, zodat voor alle $x \in (a, b)$ er geldt dat:

$$|f'(x)| \leq C.$$

Laat dan zien dat voor alle $x, y \in (a, b)$ er dan geldt dat:

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|.$$

4. Gebruik de rekenregels voor afgeleiden om de afgeleide van de functie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door:

$$f(x) = \frac{\ln(x) + e^x + \sin(3x)}{x^2 + 1},$$

te bepalen.

5. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende definities af:

Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$ en neem aan dat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie is. Zij $P = \dots\dots\dots$ een partitie van $[a, b]$. Voor $i = 1, 2, \dots, n$ definiëren we

$$M_i = \dots\dots\dots f(x), \quad \text{en} \quad \Delta_i = \dots\dots\dots$$

De *bovensom* $U(P, f)$ is gedefinieerd door

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n \dots\dots\dots$$

De *bovenintegraal* van f over $[a, b]$ is gedefinieerd door

$$\int_a^b f(x) dx = \dots\dots \{ \dots\dots : P \text{ is een partitie van } [a, b] \}.$$

(b) Toon aan dat de functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{als } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

niet Riemann-integreerbaar is.

6. Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integralen:

(a) $\int \frac{\sin 2x}{2 + \cos 2x} dx.$

(b) $\int_1^e x (\ln x)^2 dx.$

7. Geef aan of de onderstaande oneigenlijke integralen convergeren of divergeren, en laat ook zien waarom u dat denkt.

(a) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx.$

(b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx.$

8. (a) Bepaal voor de volgende machtreeksen het convergentie-interval en geef voor alle punten van het convergentie-interval aan of de machtreeks daar convergeert of absoluut convergeert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}.$$

(b) Wat is de som van deze machtreeks voor de waarden van x waarvoor zij convergeert?

9. Enkele klassieke Maclaurin reeksen zijn:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R}),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

Bepaal de limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln(1 + x^3)}{1 - \cos(3x^2)}.$$

(*Hint*: bij het berekenen van deze limiet mag u bovenstaande Maclaurin reeksen gebruiken, maar dat hoeft niet).