

Uitwerking van het Tentamen Analyse 1 (wi1600)
Donderdag 27 januari 2012; 09.00 - 12.00 uur

*Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij deze toets **niet** toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine wel.*

Elke vraag heeft hetzelfde gewicht en per vraag heeft ieder onderdeel hetzelfde gewicht.

1. (a) Haakjes wegwerken geeft:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{3x-2}(5 + \sqrt{3x-2})}{5 - 4x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x\sqrt{3x-2} + 3x^2 - 2x}{5 - 4x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} + 3 - \frac{2}{x}}{\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x} + 1}.$$

Omdat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right) = 3 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x} + 1\right) = 1,$$

zien we dus dat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{3x-2}(5 + \sqrt{3x-2})}{5 - 4x + x^2} = \frac{0 + 3}{1} = 3.$$

- (b) In een omgeving van $x = 1$ zijn zowel de teller als noemer verschillend van 0. We vinden dus:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2|^2 - 3x + 1}{x + 1 - |x-1|} = \frac{(-1)^2 - 3 + 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

- (c) Er zijn minstens twee manieren om deze opgave te maken. Bijvoorbeeld met behulp van de regel van l'Hôpital (twee keer toepassen):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Een andere manier is om de Maclaurin-reeks van $\cos x$ te gebruiken (deze was gegeven!). Er geldt:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R}).$$

Maar dan zien we dus, dat:

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R},$$

en volgt direct dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Voor $x \in (-6, \infty)$ geldt er dat:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h+6} - \sqrt{x+h}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h+6} - \sqrt{x+h}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+6} + \sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h+6} + \sqrt{x+h}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h+6) - (x+6)}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+h+6} + \sqrt{x+h}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+h+6} + \sqrt{x+h}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+6} + \sqrt{x+h}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+6}}.
\end{aligned}$$

We zien dus dat f differentieerbaar is op $(-6, \infty)$, met afgeleide f' :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}.$$

3. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende stelling af:

Stelling (Middelwaardestelling) *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie die **differentieerbaar** is op (a, b) . Dan bestaat er een $\xi \in (a, b)$ waarvoor geldt:*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b) Laat $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$ en laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn zoals in de Middelwaardestelling hierboven. Veronderstel verder dat er een $C \in \mathbb{R}$ bestaat, zodat voor alle $x \in (a, b)$ er geldt dat:

$$|f'(x)| \leq C.$$

Laat dan zien dat voor alle $x, y \in (a, b)$ er dan geldt dat:

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|.$$

Bewijs. We beschouwen eerst het geval dat $x = y$, dan is

$$|f(x) - f(y)| = 0 \leq C \cdot 0 = C|x - y|,$$

en is de uitspraak dus correct. Vervolgens beschouwen we het geval dat $x \neq y$. Wegens symmetrie mogen we aannemen dat $x < y$ (met symmetrie bedoelen we: het geval $y < x$ gaat op precies dezelfde manier als het geval $x < y$). Wegens de Middelwaardestelling bestaat er een $\xi \in (x, y)$ met

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Juist omdat $x \neq y$ geldt er dan dat

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| |y - x|,$$

en omdat $|f'(\xi)| \leq C$ zien we dus direct dat

$$|f(y) - f(x)| \leq C|y - x|.$$

4. De functie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, is gedefinieerd door:

$$f(x) = \frac{\ln(x) + e^x + \sin(3x)}{x^2 + 1}.$$

Dan geldt er dat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x} + (1 + 3 \cos 3x) \cdot e^{x+\sin 3x}\right) (x^2 + 1) - 2x (\ln(x) + e^{x+\sin(3x)})}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x + \frac{1}{x} + (1 + x^2)(1 + 3 \cos 3x) \cdot e^{x+\sin 3x} - 2x \ln x - 2xe^{x+\sin 3x}}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

5. (a) Maak op uw antwoordvel de volgende definities af:

Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \leq b$ en neem aan dat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een **begrensde** functie is. Zij $P = \{a = x_0, x_1, \dots, b = x_n\}$ een partitie van $[a, b]$. Voor $i = 1, 2, \dots, n$ definiëren we

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \text{en} \quad \Delta_i = x_i - x_{i-1}.$$

De *bovensom* $U(P, f)$ is gedefinieerd door

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i.$$

De *bovenintegraal* van f over $[a, b]$ is gedefinieerd door

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{ U(P, f) : P \text{ is een partitie van } [a, b] \}.$$

(b) Er geldt dat de functie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{als } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

niet Riemann-integreerbaar is.

Immers: kies een willekeurige partitie $P = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ (met $x_0 < x_1 < \dots < x_n$) van $[0, 1]$. Dan ligt in elk interval $[x_{i-1}, x_i]$ van P een rationaal getal en een irrationaal getal (dit hebben we bij Wiskundige Structuren gezien). Dus volgt er uit de definitie van f dan direct dat de bijdrage aan de ondersom $L(P, f)$ van dit interval gelijk is aan 0, en de bijdrage aan de bovensom van dit interval gelijk is aan $x_i - x_{i-1}$ (en $x_i - x_{i-1}$ is de lengte van het interval $[x_{i-1}, x_i]$). Maar dan is de ondersom $L(P, f) = 0$ en geldt er voor de bovensom dat $U(P, f) = 1$ (let op, dat we gebruiken dat f precies twee waarden aanneemt, nl. 0 en 1). Omdat dit voor een *willekeurige* partitie P geldt moet er dus wel gelden dat de *bovenintegraal* gelijk is aan 1, en de *onderintegraal* gelijk aan 0, en daar $0 \neq 1$ zien we dat f niet integreerbaar is.

6. (a) Merk op, dat de teller van $\frac{\sin 2x}{2 + \cos 2x}$ gelijk is aan de helft van de afgeleide van de noemer, dus het ligt voor de hand om een ln van de noemer te proberen (en deze met een factor 1/2 te vermenigvuldigen):

$$\int \frac{\sin 2x}{2 + \cos 2x} dx = -\frac{1}{2} \ln(2 + \cos 2x) + C.$$

Probeer eens de afgeleide van $-\frac{1}{2}\ln(2+\cos 2x)+C$; het klopt!! Je zou ook in MAPLE de volgende code kunnen inkloppen:

```
int( (sin(2*x))/(2+cos(2*x)), x );
```

Dan rolt het antwoord er ook zo uit ...

- (b) Dit is echt een som om eens lekker te gaan *partieel integreren!* Zet $f(x) = x$ (dus dan is de primitieve $F(x) = \frac{1}{2}x^2$) en $G(x) = (\ln x)^2$ (dus G heeft als afgeleide $g(x) = \frac{2\ln x}{x}$), dan vinden we:

$$\begin{aligned}\int_1^e x (\ln x)^2 dx &= \int_1^e f(x)G(x) dx \\ &= [F(x)G(x)]_1^e - \int_1^e F(x)g(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 (\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot 2\frac{\ln x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e x \ln x dx.\end{aligned}$$

Apart (en ook weer partieel integreren):

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2.\end{aligned}$$

Tezamen geeft dit dan dat:

$$\int_1^e x (\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2 = 2.718281828 \dots$$

Je kunt natuurlijk ook de volgende regel in MAPLE inkloppen:

```
int( x*((log(x))^2), x=1..exp(1));
```

7. Geef aan of de onderstaande oneigenlijke integralen convergeren of divergeren, en laat ook zien waarom u dat denkt.

- (a) Als $x \geq 1$, dan geldt er dat $0 < \frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$, en omdat

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (-e^{-A} + e^{-1}) = \frac{1}{e},$$

zien we dat:

$$0 < \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \leq \int_1^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{e},$$

en dus is $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$ convergent.

(b) Omdat er geldt dat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \cos 0 = 1,$$

bestaat er een interval $(0, \varepsilon)$ (met $0 < \varepsilon < 1$) zodat

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{2} \quad \text{als } x \in (0, \varepsilon).$$

Merk op, dat

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$$

een keurige convergente integraal is. Maar dan hangt het convergeren of divergeren van $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ dus af van wat de functie $\frac{\sin x}{x^2}$ op $(0, \varepsilon)$ “doet.”

Merk op, dat:

$$\frac{\sin x}{x^2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{als } x \in (0, \varepsilon),$$

en dat

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{x} dx$$

naar ∞ divergeert. Dus is ook de gezocht integraal $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ divergent.

8. (a) Beschouw de volgende machtreeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3}.$$

Dit is een machtreeks van de vorm

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n,$$

met $c = 0$ en $a_n = 1/(n+3)$. Beschouw

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+4} = 1.$$

Wegens Stelling 17 op blz. 527 van Adams & Essex geldt er dan dus dat de convergentiestraal R van de machtreeks gelijk is aan 1, dat voor x tussen -1 en 1 de convergentie absoluut is. Verder geldt er als $|x| > 1$ dat de machtreeks divergeert. Als $x = 1$, dan kijken we naar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots,$$

en dit divergeert naar ∞ . Als $x = -1$ beschouwen we

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

en met behulp van Leibniz zien we dat dit convergeert, maar niet absoluut convergent is.

(b) Wat is de som van deze machtreeks voor de waarden van x waarvoor zij convergeert?

Het is duidelijk, dat als $x = 0$, de machtreeks gelijk is aan $\frac{1}{3}$ (gebruik hierbij dat $0^0 = 1$ en $0^n = 0$ voor alle positieve gehele getallen n). We mogen dus aannemen dat $x \neq 0$ (want het geval $x = 0$ weten we al!).

Er geldt wegens Stelling 19 op blz. 531 van Adams & Essex (als $x \neq 0$) dat:

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \frac{x^n}{n+3} &= \frac{1}{x^3} \sum_0^\infty \frac{x^{n+3}}{n+3} \\ &= \frac{1}{x^3} \sum_0^\infty \left(\int_0^x t^{n+2} dt \right) \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\sum_0^\infty t^{n+2} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x (t^2 + t^3 + t^4 + \dots) dt \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \dots - 1 - t) dt \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\sum_0^\infty t^n - 1 - t \right) dt \\ &= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1 - t \right) dt \\ &= \frac{1}{x^3} \left[-\ln(1-t) - t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x \\ &= -\frac{1}{x^3} \ln(1-x) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

9. Omdat

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R})$$

zien we dat

$$e^{2x} - 1 = 2x + \frac{4x^2}{2} + \dots$$

Uit

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

volgt dan dat:

$$\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \dots$$

Tenslotte, uit

$$\cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{voor alle } x \in \mathbb{R})$$

volgt dat

$$1 - \cos(3x^2) = 1 - \left(1 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{81}{24}x^8 - \dots \right).$$

Dit geeft allemaal tezamen dat:

$$\frac{(e^{2x} - 1) \ln(1 + x^3)}{1 - \cos(3x^2)} = \frac{\left(2x + \frac{4x^2}{2} + \dots\right) \left(x^3 - \frac{x^6}{2} + \dots\right)}{\frac{9}{2}x^4 - \frac{81}{24}x^8 + \dots} = \frac{2 + 2x + \dots}{\frac{9}{2} - \frac{81}{24}x^4 + \dots},$$

waarbij alle hogere machten van x in de $\dots$ staan!! Maar dan geldt er dat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) \ln(1 + x^3)}{1 - \cos(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2x + \dots}{\frac{9}{2} - \frac{81}{24}x^4 + \dots} = \frac{4}{9}.$$

Door

```
limit( ( (exp(1)^(2*x)-1)*ln(1+x^3) )/(1-cos(3*x^2)), x=0);
```

in MAPLE in te kloppen krijgen we zonder enige moeite ook het antwoord ...