

Toets Analyse 1 (wi1600)

Dinsdag 30 oktober 2012; 14.00 - 15.30 uur

Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij deze toets **niet** toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine wel.

Ieder onderdeel van elke vraag heeft hetzelfde gewicht (i.e., is dus evenveel punten waard).

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sin\left(\frac{2}{x}\right) + 3 \cos\left(\frac{4}{x}\right) + 5 \right).$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 7\sqrt{x})(x + 2012)}{(3x - 1)(x\sqrt{x} + 4x)(5 - \sqrt{x})}.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - x - e} \right).$$

2. Gebruik de formele definitie van limiet (dus met ε 's en δ 's) om aan te tonen dat:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}.$$

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in $x = 0$ aan de curve $f(x) = e^{\sin(x \cos x)}$.

4. Beschouw de functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Laat met behulp van de definitie van afgeleide zien dat f differentieerbaar is in $x_0 = 0$. Wat is $f'(0)$?

5. Bewijs met behulp van de *Middelwaardstelling* dat voor alle x in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ er geldt dat

$$\tan x \leq x - \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \left(= x - \frac{\pi}{4} + 1 \right).$$

6. Laat $D = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$. Beschouw de functie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{4-x-2\sqrt{x^2-8}}, & \text{als } x \geq 3, \\ \frac{x-3}{x-4}, & \text{als } -1 < x < 3, \\ \frac{x+5}{x+6}, & \text{als } x \leq -1 \text{ en } x \neq -6. \end{cases}$$

- (a) Is f continu in $x = -1$? Vergeet niet uit te leggen waarom (wel/niet)!
- (b) Toon aan dat f differentieerbaar is in $x = 3$.
- (c) Bepaal de eventuele nulpunten en de eventuele (scheve, horizontale en verticale) asymptoten van f . Maak een schets van de grafiek van f op grond van de door u verkregen gegevens.