

Toets Analyse 1 (wi1600)
Vrijdag 4 november 2011; 14.00 - 15.30 uur

*Het gebruik van een boek of aantekeningen is bij deze toets **niet** toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine wel.*

Ieder onderdeel van elke vraag heeft hetzelfde gewicht (i.e., is dus evenveel punten waard).

1. Ga na of de volgende limieten bestaan, en wat de waarde is. Geef duidelijk aan hoe u aan uw resultaat komt. Als de limiet niet bestaat, geef dan duidelijk aan waarom niet.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) \cos x.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$$

2. Gebruik de formele definitie van limiet (dus met ε 's en δ 's) om aan te tonen dat:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 1 = 7.$$

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in $x = 0$ aan de curve $f(x) = \sqrt{1 + 2x^2 \sin x}$.

4. Laat $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$, en laat $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn met $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a, b)$. Laat verder gegeven zijn dat differentieerbaar is in het punt x_0 . Bewijs dan dat geldt dat $1/f$ differentieerbaar is in het punt x_0 met afgeleide

$$\left(\frac{1}{f} \right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

5. Geef een bewijs van de volgende stelling, waarin u de resultaten/stellingen die u gebruikt noemt, en duidelijk aangeeft hoe u deze gebruikt:

Stelling. *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is op (a, b) . Als $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a, b)$, dan is f constant op $[a, b]$.*

6. Laat $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Beschouw de functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{|x^2 - 1|}, & \text{als } x \geq 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{x^6 + 1}}, & \text{als } x < 0. \end{cases}$$

- (a) Is f differentieerbaar op D ? Geef duidelijk aan waarom wel/niet.
 (b) Bepaal de eventuele (horizontale, verticale en scheve) asymptoten van f .
 (c) Bepaal de nulpunten en de (locale) maxima en minima van f , en maak een schets van f met behulp van alle gegevens die u tot nu toe gevonden hebt.

Einde.

