

== Tentamen Analyse 1, WI1600 ==

Maandag 10 januari 2011, 14.00-17.00u

Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI

- Schrijf op ieder vel je naam en studienummer.
 - Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Er worden exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
 - Het gebruik van een (grafische) rekenmachine en het TU Delft formuleblad is toegestaan.
-

1. Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)e^{x+1}}{e^x - \arctan(x)}, & x \leq 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Beargumenteer dat f continu is op $\mathbb{R}$. (2)

b) Bepaal de (horizontale, verticale en scheve) asymptoten van f . (3)

c) Laat zien dat voor $x > 0$ de afgeleide van f wordt gegeven door (1)

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}-1} \left(\frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \right), \quad x > 0.$$

d) Is f differentieerbaar in $x = 0$? (3)

2. a) Formuleer de middelwaardestelling (mean value theorem). (1)

b) Bewijs: (3)

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}} \leq \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \quad \text{voor alle } x > 0.$$

c) Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{x^3(x+1)} - x \right)$. (2)

*** Zie ommezijde voor vervolg ***

3. Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal. (2+3+2)

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2} dx \quad \text{b) } \int e^{x+e^x} \sin(e^x) dx \quad \text{c) } \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

4. Bepaal of de volgende reeksen absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt! (3+2)

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks: (2)

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)! 3^n} x^n$$

5. De functie $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$g(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \cos(t^2) dt$$

a) Geef een formule voor de afgeleide $\frac{dg}{dx}$. (1)

b) Laat zien dat g inverteerbaar is en geef de formule van de raaklijn aan de grafiek van g^{-1} in het punt $(0, g^{-1}(0))$. (4)

c) Bepaal de Taylorreeks van g rond het punt $x = 0$. (2)

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Aantal punten} + 4}{4}$$