

== Uitwerkingen Tentamen Analyse 1, WI1600 ==

Maandag 10 januari 2011, 14.00-17.00u

Technische Universiteit Delft, Faculteit EWI

1. Gegeven is de functie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)e^{x+1}}{e^x - \arctan(x)}, & x \leq 0, \\ (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

- a) Beargumenteer dat f continu is op $\mathbb{R}$.
- b) Bepaal de (horizontale, verticale en scheve) asymptoten van f .
- c) Laat zien dat voor $x > 0$ de afgeleide van f wordt gegeven door

$$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}-1} \left(\frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \right), \quad x > 0.$$

- d) Is f differentieerbaar in $x = 0$?

Uitwerking

- a) Voor $x < 0$: $x+1$, e^{x+1} , e^x en $\arctan(x)$ zijn continu, dus de som, het product en het quotiënt van deze functies is ook continu. Verder is $\arctan(x)$ negatief voor $x < 0$, dus de noemer $e^x - \arctan(x)$ is ongelijk nul.

Voor $x > 0$: Er geldt $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$. Dit is een continue functie, want e^x , $\frac{1}{x}$ en $\ln(1+x)$ zijn continu, dus het product en de samenstelling is ook continu.

In $x = 0$: Er geldt

$$f(0) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{(x+1)e^{x+1}}{e^x - \arctan(x)} = \frac{(0+1)e^{0+1}}{e^0 - \arctan(0)} = e,$$

en

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e,$$

dus f is ook continu in $x = 0$.

- b) Voor $x \rightarrow \infty$: Er geldt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1+x) = 0$ (standaardlimiet), dus uit continuïteit van de exponentiële functie volgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^0 = 1.$$

De functie f heeft dus de lijn $y = 1$ als horizontale asymptoot.

Voor $x \rightarrow -\infty$: Er geldt $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + e^x) = 0$ (standaardlimieten), dus

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)e^{x+1}}{e^x - \arctan(x)} = \frac{0}{0 + \frac{\pi}{2}} = 0,$$

dus f heeft ook $y = 0$ als een horizontale asymptoot.

Omdat f horizontale asymptoten heeft bij $+\infty$ en $-\infty$, heeft f geen scheve asymptoten. Verder zijn er geen verticale asymptoten, want f is continu op heel $\mathbb{R}$.

c) We gebruiken de kettingregel en de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(1+x)^{\frac{1}{x}} &= \frac{d}{dx}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \left(\frac{x \cdot \frac{1}{1+x} - \ln(1+x) \cdot 1}{x^2} \right) \\ &= (1+x)^{\frac{1}{x}-1} \left(\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \right).\end{aligned}$$

d) We berekenen eerst de rechterlimiet in $x = 0$ van de afgeleide, zie 1(c). We gebruiken

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad \text{voor } x \rightarrow 0,$$

dan volgt

$$(1+x)\ln(1+x) = (1+x)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) = x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \quad \text{voor } x \rightarrow 0.$$

Nu vinden we

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x - (x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3))}{x^2} = \lim_{x \downarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x) \right) = -\frac{1}{2},$$

en de limiet van de afgeleide wordt dan

$$\lim_{x \downarrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+x} \left(\frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \right) = e \cdot 1 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{e}{2}.$$

Vervolgens berekenen we de rechterlimiet in $x = 0$. Voor $x < 0$ vinden we met de quotiëntregel en de productregel

$$f'(x) = \frac{(e^x - \arctan(x))((x+1)e^{x+1} + e^{x+1}) - (x+1)e^{x+1}\left(e^x - \frac{1}{1+x^2}\right)}{(e^x - \arctan(x))^2},$$

en dus

$$\begin{aligned}\lim_{x \uparrow 0} f'(x) &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{(e^x - \arctan(x))((x+1)e^{x+1} + e^{x+1}) - (x+1)e^{x+1}\left(e^x - \frac{1}{1+x^2}\right)}{(e^x - \arctan(x))^2} \\ &= \frac{(e^0 - 0)2e^1}{(e^0 - 0)^2} = 2e.\end{aligned}$$

We zien dat $\lim_{x \downarrow 0} f'(x) \neq \lim_{x \uparrow 0} f'(x)$, dus f is niet differentieerbaar in $x = 0$.

2. a) Formuleer de middelwaardestelling (mean value theorem).

b) Bewijs:

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}} \leq \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \quad \text{voor alle } x > 0.$$

c) Bereken $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{x^3(x+1)} - x \right)$.

Uitwerking

a) Als f continu is op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) , dan bestaat er een $c \in (a, b)$ zodanig dat

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

b) Neem $x > 0$ vast. We kiezen $f(t) = \sqrt[4]{t}$, $a = x$ en $b = x + 1$. De functie $f(t) = \sqrt[4]{t}$ is continu op $[x, x + 1]$ en differentieerbaar op $(x, x + 1)$ met afgeleide $f'(t) = \frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}$. We passen de middelwaardestelling toe: er bestaat een $c \in (x, x + 1)$ zodanig dat

$$\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{(x+1) - x} = \frac{1}{4\sqrt[4]{c^3}}.$$

Omdat $\frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}$ een dalende functie is op $[x, x + 1]$ volgt nu

$$\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+1)^3}} \leq \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x} = \frac{1}{4\sqrt[4]{c^3}} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

c) We vermenigvuldigen de ongelijkheid uit 2(b) met $\sqrt[4]{x^3}$, dan vinden we

$$\frac{1}{4} \sqrt[4]{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3} \leq \sqrt[4]{x^3(x+1)} - x \leq \frac{1}{4}.$$

De limiet van de uitdrukking aan de linkerkant is

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sqrt[4]{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3} = \frac{1}{4} \sqrt[4]{1^3} = \frac{1}{4}.$$

Uit de insluitstelling volgt dus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{x^3(x+1)} - x \right) = \frac{1}{4}.$$

3. Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal.

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2} dx \quad \text{b) } \int e^{x+e^x} \sin(e^x) dx \quad \text{c) } \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

Uitwerking

a) We gaan eerst breuksplitsen:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x}.$$

We schrijven de rechterkant weer als één breuk:

$$\frac{Ax(x+1) + Bx + C(x+1)^2}{(x+1)^2x} = \frac{x^2(A+C) + x(A+B+2C) + C}{(x+1)^2x}.$$

Aangezien de noemer gelijk moet zijn aan 1 voor alle x , vinden we de vergelijkingen

$$A + C = 0, \quad A + B + 2C = 0, \quad C = 1,$$

met als oplossing $A = -1, B = -1, C = 1$. Nu gaan we integreren

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)^2} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \left(\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^2 \\ &= \ln 2 - \ln 3 + \frac{1}{3} - \ln 1 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

b) We passen eerst de substitutie $u = e^x$ ($du = e^x dx$) toe:

$$\int e^{x+e^x} \sin(e^x) dx = \int e^u \sin(u) du$$

We gaan nu partieel integreren. We kiezen $f(u) = e^u$ en $g'(u) = \sin(u)$, dan $f'(u) = e^u$ en $g(u) = -\cos(u)$, dan

$$I(u) = \int e^u \sin(u) du = -e^u \cos(u) + \int e^u \cos(u) du.$$

We gaan nu nogmaals partieel integreren

$$\int e^u \cos(u) du = e^u \sin(u) - \int e^u \sin(u) du.$$

We vinden nu de vergelijking

$$I(u) = e^u (\sin(u) - \cos(u)) - I(u),$$

dus, omdat primitieven uniek zijn tot op een constante,

$$I(u) = \frac{1}{2} e^u (\sin(u) - \cos(u)) + C.$$

Tenslotte vervangen we u door e^x :

$$\int e^{x+e^x} \sin(e^x) dx = \frac{1}{2} e^{e^x} (\sin(e^x) - \cos(e^x)) + C.$$

c) De integraal is oneigenlijk bij 0 en bij ∞ , dus

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \lim_{a \downarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

In plaats van het punt 1 als grens mag je ieder ander punt $p \in (0, \infty)$ kiezen.

We berekenen nu eerst de primitieve. We gebruiken de substitutie $u = \sqrt{x}$, dan $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ en $x = u^2$. Nu vinden we

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2 \int \frac{1}{u^2+1} du = 2 \arctan(u) + C = 2 \arctan(\sqrt{x}) + C,$$

en dus

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \lim_{a \downarrow 0} 2 \arctan(\sqrt{x}) \Big|_a^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \arctan(\sqrt{x}) \Big|_1^b \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) - 2 \lim_{a \downarrow 0} \arctan(a) = \pi. \end{aligned}$$

4. Bepaal of de volgende reeksen absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt!

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks:

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)! 3^n} x^n$$

Uitwerking

- a) We bekijken eerst of de reeks absoluut convergent is. Voor alle $n \geq 2$ geldt er $\ln(n) < n$, en dus $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$. Omdat de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent is, volgt uit het majoranten-minoranten kenmerk dat de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ divergent is. De gevraagde reeks is dus niet absoluut convergent.

We bekijken nu of de reeks convergent is. Het is een alternerende reeks, dus we proberen het kenmerk van Leibniz toe te passen. Er geldt

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)}, \quad \text{voor alle } n, \\ 2. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0, \end{aligned}$$

dus de reeks is convergent. Conclusie: de reeks is voorwaardelijk convergent.

- b) De reeks heeft alleen positieve termen, dus convergentie is in dit geval hetzelfde als absolute convergentie. We gebruiken het limietvergelijgingskenmerk met $a_n = \tan(\frac{1}{n^2})$ en $b_n = \frac{1}{n^2}$. Er geldt

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \frac{1}{\cos(\frac{1}{n^2})}.$$

Met behulp van de standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ vinden we

$$L = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Omdat $0 < L < \infty$ en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is, volgt dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(\frac{1}{n^2})$ ook convergent is.

- c) We schrijven de machtreeks als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. We berekenen de convergentiestraal met behulp van het quotiënten kenmerk:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

De convergentiestraal is dan $R = \frac{1}{L} = 12$.

5. De functie $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$g(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \cos(t^2) dt$$

- (a) Geef een formule voor de afgeleide $\frac{dg}{dx}$.
 (b) Laat zien dat g inverteerbaar is en geef de formule van de raaklijn aan de grafiek van g^{-1} in het punt $(0, g^{-1}(0))$.
 (c) Bepaal de Taylorscheeks van g rond het punt $x = 0$.

Uitwerking

- a) Omdat $\cos(t^2)$ een continue functie is, volgt uit de hoofdstelling van de integraalrekening en de kettingregel dat g differentieerbaar is met

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cos(\frac{1}{4}x^2).$$

- b) Uit $x \in [-2, 2]$ volgt

$$\frac{1}{4}x^2 \in [0, 1].$$

De functie $\cos(t)$ is positief op $[0, 1]$. We zien nu dat $g'(x) > 0$ voor alle $x \in [-2, 2]$. De functie g is dus strikt stijgend, en dus inverteerbaar.

De raaklijn aan de grafiek van g^{-1} in het punt $(0, g^{-1}(0))$ is de lijn

$$y = g^{-1}(0) + \left. \frac{dg^{-1}}{dx} \right|_{x=0} \cdot x$$

Het is duidelijk dat

$$g(0) = \int_0^0 \cos(t^2) dt = 0,$$

dus $g^{-1}(0) = 0$.

We bepalen de afgeleide van g^{-1} met behulp van impliciet differentiëren. Noem $y = g^{-1}(x)$, dan $x = g(y)$. Differentiëren naar x geeft nu

$$1 = g'(y) \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{2}{\cos(\frac{1}{4}y^2)},$$

en dus

$$\left. \frac{dg^{-1}}{dx} \right|_{x=0} = \frac{2}{\cos(\frac{1}{4}(g^{-1}(0))^2)} = \frac{2}{\cos(\frac{1}{4}0^2)} = 2.$$

De gevraagde raaklijn is dus $y = 2x$.

c) We gebruiken de Taylorreeks rond $x = 0$ van $\cos(x)$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nu vinden we de Taylorreeks van $\cos(t^2)$ rond $t = 0$:

$$\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{4n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

We mogen een machtreeks binnen de convergentiestraal termsgewijs integreren, dus voor g vinden we

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^{\frac{x}{2}} t^{4n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{t^{4n+1}}{4n+1} \Big|_0^{\frac{x}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{4n+1}}{2^{4n+1}(4n+1)}, \end{aligned}$$

voor alle $x \in [-2, 2]$.