

== Tentamen Analyse 1, WI1600 ==

Dinsdag 6 april 2010, 9.00-12.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studienummer.
 - Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Het gebruik van een (grafische) rekenmachine en het TU Delft formuleblad is toegestaan. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
 - Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.
-

1. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat voor $x \neq 0$ de afgeleide van f wordt gegeven door

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \quad x \neq 0.$$

(b) Is f differentieerbaar in $x = 0$?

(c) Bewijs dat f een lokaal minimum heeft in $[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$.

(d) De functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door $g(x) = |f(x)|$. Bewijs dat g *niet* differentieerbaar is in $x = \frac{1}{\pi}$.

(e) Toon aan dat de lijn $y = x$ een scheve asymptoot is van f .

(f) Formuleer de middelwaardestelling (mean value theorem), en bereken hiermee

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)).$$

2. Bepaal of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(\frac{1}{n})}{n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((\frac{1}{6} + n)\pi)}{\sqrt{n}} \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{n-1}}{(n+1)^3 n!}$$

3. Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2} x^n$$

*** Zie ommezijde voor vervolg ***

4. Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal.

$$(a) \int_1^2 \ln(x^{3x}) dx \quad (b) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

5. De functie $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$h(x) = \int_0^{x^2-1} \frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

(a) Bewijs: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) < \infty$.

(b) Formuleer de hoofdstelling van de integraalrekening, en gebruik deze om de buigpunten van h te bepalen.

(c) Toon aan dat

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} \frac{(x^2 - 1)^{n+1}}{2^{n+\frac{3}{2}}(n+1)}, \quad |x^2 - 1| < 2, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\binom{\alpha}{0} = 1$ en $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$

(d) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2}h(x) + 1 - x^2}{(x-1)^2}.$$

Opgave	1	2	3	4	5	Totaal
Punten	13 (1+2+2+2+2+4)	9 (3+3+3)	4	9 (3+3+3)	10 (2+4+2+2)	45

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Aantal punten} + 5}{5}$$