

== Uitwerkingen Tentamen Analyse 1, WI1600 ==

Dinsdag 6 april 2010, 9.00-12.00u

1. De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat voor $x \neq 0$ de afgeleide van f wordt gegeven door

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), \quad x \neq 0.$$

(b) Is f differentieerbaar in $x = 0$?

(c) Bewijs dat f een lokaal minimum heeft in $[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$.

(d) De functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door $g(x) = |f(x)|$. Bewijs dat g *niet* differentieerbaar is in $x = \frac{1}{\pi}$.

(e) Toon aan dat de lijn $y = x$ een scheve asymptoot is van f .

(f) Formuleer de middelwaardestelling (mean value theorem), en bereken hiermee

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)).$$

Uitwerking

(a) Gebruik de kettingregel en de productregel.

(b) Omdat $-1 \leq \sin(\frac{1}{h}) \leq 1$ geldt er

$$-h \leq h \sin(\frac{1}{h}) \leq h$$

voor alle $h \neq 0$. Nu volgt uit de insluitstelling dat

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(\frac{1}{h}) = 0,$$

dus f is differentieerbaar in 0.

(c) Er geldt

$$f'(\frac{1}{2\pi}) = -1, \quad f'(\frac{1}{\pi}) = 1,$$

en f' is continu op $[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$, dus volgens de tussenwaardestelling heeft f' minimaal één nulpunt in $[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}]$ waarbij f' van teken wisselt van $-$ naar $+$. In dit nulpunt heeft f een minimum.

(d) De afgeleide van g rond het punt $\frac{1}{\pi}$ wordt gegeven door

$$g'(x) = \begin{cases} -f'(x), & x < \frac{1}{\pi}, \\ f'(x), & x > \frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

Omdat $-\lim_{x \uparrow \frac{1}{\pi}} f'(x) \neq \lim_{x \downarrow \frac{1}{\pi}} f'(x)$, is f niet differentieerbaar in $x = \frac{1}{\pi}$.

- (e) We moeten laten zien dat $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$. Met het derdegraads Taylor polynoom van $\sin(x)$ rond 0 volgt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \right) &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{\sin(y) - y}{y^2} \\ &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{y - \frac{1}{6}y^3 + \mathcal{O}(y^5) - y}{y^2} = 0.\end{aligned}$$

- (f) Zie boek voor de middelwaardestelling. Als $x > 0$ is f differentieerbaar op $(x, x+1)$ en continu op $[x, x+1]$, dus volgens de middelwaardestelling bestaat er een $c \in (x, x+1)$ waarvoor geldt

$$f(x+1) - f(x) = f'(c) = 2c \sin\left(\frac{1}{c}\right) - \cos\left(\frac{1}{c}\right),$$

en dus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(2 \frac{\sin(\frac{1}{c})}{1/c} - \cos(\frac{1}{c}) \right) = 2 - 1 = 1.$$

2. Bepaal of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(\frac{1}{n})}{n} \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\left(\frac{1}{6} + n\right)\pi\right)}{\sqrt{n}} \quad (c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{n-1}}{(n+1)^3 n!}$$

Uitwerking

- (a) Gebruik het limietenkenmerk met $a_n = \frac{\arcsin(\frac{1}{n})}{n}$ en $b_n = \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}.$$

Met de regel van l'Hôpital volgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1,$$

dus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Aangezien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergent is, is de gevraagde reeks ook convergent.

- (b) Er geldt

$$\cos\left(\left(\frac{1}{6} + n\right)\pi\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{3}, & \text{als } n \text{ even,} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}, & \text{als } n \text{ oneven,} \end{cases}$$

dus de reeks is alternerend. De reeks $\frac{1}{2}\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ is divergent (een p -reeks met $p = \frac{1}{2}$), dus de gevraagde reeks is niet absoluut convergent. Verder geldt er $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, dus volgens het alternerende reeksen kenmerk van Leibniz is de reeks wel convergent, dus voorwaardelijk convergent.

(c) Noem $a_n = \frac{(-1)^n e^{n-1}}{(n+1)^3 n!}$, dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^3 \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

dus volgens het quotiëntenkenmerk is de reeks absoluut convergent.

3. Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2} x^n$$

Uitwerking

Er geldt

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2} x^n \right|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1/2}{n} \right)^n} = \frac{|x|}{\sqrt{e}}.$$

Volgens het wortelkenmerk convergeert de reeks absoluut als $\rho < 1$, dus als $|x| < \sqrt{e}$. De convergentiestraal is dus $\sqrt{e}$.

4. Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal.

$$(a) \int_1^2 \ln(x^{3x}) dx \quad (b) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx \quad (c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

Uitwerking

(a) We gaan partiël integreren:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(x^{3x}) dx &= \int_1^2 3x \ln x dx = \frac{3}{2} x^2 \ln x \Big|_1^2 - \frac{3}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 6 \ln 2 - \frac{3}{4} x^2 \Big|_1^2 = 6 \ln 2 - 2 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) Er geldt $(x^2 + 1)(x + 1) = (x^3 + x^2 + x + 1)$ dus

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx = \int 1 dx + \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx.$$

We geen nu breuksplitsen

$$\frac{x^2}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{a(x^2 + 1) + (bx + c)(x + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)}.$$

Dit levert de vergelijkingen

$$a + b = 1, \quad b + c = 0, \quad a + c = 0,$$

met als oplossing $a = b = \frac{1}{2}$ en $c = -\frac{1}{2}$. Dus

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx &= x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + x^2} \\ &= x + \frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \arctan(x) + C.\end{aligned}$$

(c) De noemer van de integrand wordt 0 in $x = 0$, dus

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \lim_{t \downarrow 0} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx.$$

Gebruik de substitutie $u = \sin(x)$ ($du = \cos(x)dx$), dan $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - u^2$, en

$$\begin{aligned}\int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx &= \int_{x=t}^{x=\frac{\pi}{2}} \frac{1 - u^2}{\sqrt{u}} du \\ &= \left(2u^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_{x=t}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(2\sqrt{\sin(x)} - \frac{2}{5} \sin^2(x) \sqrt{\sin(x)} \right) \Big|_t^{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

We laten $t \downarrow 0$, dan volgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = 2 - \frac{2}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

5. De functie $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$h(x) = \int_0^{x^2-1} \frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}} dt.$$

(a) Bewijs: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) < \infty$.

(b) Formuleer de hoofdstelling van de integraalrekening, en gebruik deze om de buigpunten van h te bepalen.

(c) Toon aan dat

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} \frac{(x^2 - 1)^{n+1}}{2^{n+\frac{3}{2}}(n+1)}, \quad |x^2 - 1| < 2, \quad x \geq 0,$$

waarbij $\binom{\alpha}{0} = 1$ en $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$

(d) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2}h(x) + 1 - x^2}{(x-1)^2}.$$

Uitwerking

De opgave wordt een stuk makkelijker als we schrijven

$$h(x) = \frac{-2}{\sqrt{2+t}} \bigg|_0^{x^2-1} = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Het was eigenlijk niet de bedoeling dat de integraal direct geëvalueerd kon worden. Hier volgt de uitwerking van de opgave zonder deze evaluatie.

(a) Voor $t > 1$ geldt er

$$\frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

De oneigenlijke integraal $\int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}} dt$ is convergent (een p -integraal met $p = \frac{3}{2}$), dus de oneigenlijke integraal $\int_1^\infty \frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}} dt$ is ook convergent. Dus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \int_0^1 \frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}} dt + \int_1^\infty \frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}} dt < \infty.$$

(b) Zie boek voor de hoofdstelling. Omdat $\frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}}$ continu is op het interval $[0, x^2 - 1]$ voor alle $x \geq 0$, volgt uit de hoofdstelling en de kettingregel dat

$$h'(x) = \frac{1}{(2 + (x^2 - 1))^{\frac{3}{2}}} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nogmaals differentiëren geeft

$$h''(x) = \frac{2(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 2x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(2 - 4x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

We zien dat $h''(x) = 0$ als $2 - 4x^2 = 0$, ofwel $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $h''(x)$ wisselt van teken in $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus dit is het buigpunt.

(c) We gebruiken de binomiaalreeks:

$$\frac{1}{(2+t)^{\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{3}{2}}(1+t/2)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} \left(\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} \frac{t^n}{2^{n+\frac{3}{2}}}, \quad \left|\frac{t}{2}\right| < 1.$$

Binnen de convergentiestraal mogen we termsgewijs integreren, dus

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} \frac{1}{2^{n+\frac{3}{2}}} \int_0^{x^2-1} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{n} \frac{1}{2^{n+\frac{3}{2}}} \frac{(x^2-1)^{n+1}}{n+1},$$

voor $|x^2 - 1|/2 < 1$.

(d) Gebruik de eerste twee termen van de reeksontwikkeling voor h uit onderdeel c:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2}h(x) + 1 - x^2}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}(x^2-1) - \frac{3}{2} \frac{(x^2-1)^2}{2^{5/2} \cdot 2} + \mathcal{O}((x^2-1)^3) \right) + 1 - x^2}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{3}{2^3}(x-1)^2(x+1)^2 + \mathcal{O}((x^2-1)^3)}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$