

== Tentamen Analyse 1, WI1600 ==

Maandag 11 januari 2010, 9.00-12.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studienummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine en het TU Delft formuleblad is toegestaan. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

1. Beschouw de functie $f : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\sin(x) + 2}\right).$$

- Bepaal de aard (maximum, minimum, lokaal, globaal), plaats en grootte van de extremen van f .
 - Laat de functie g de beperking zijn van f tot het interval $[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$. Toon aan dat g inverteerbaar is.
 - Geef een expliciet functie voorschrift voor g^{-1} . Wat is het domein van g^{-1} ?
2. Bepaal of de volgende reeksen voorwaardenlijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} + \cos(n)}{2n^2 - 1}$$

Bepaal het convergentie interval van de volgende machtreeks:

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}} (x-1)^{n-1}.$$

3. Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal

$$(a) \int_0^1 \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} dx \quad (b) \int \frac{x^3 - 4x + 1}{x-2} dx \quad (c) \int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

Hint bij (c): bepaal eerst een primitieve.

*** Zie ommezijde voor vervolg ***

4. De functie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\ln t}{1-t}, & t \neq 1, \\ -1, & t = 1. \end{cases}$$

We definiëren hiermee de functie $H : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$H(x) = \int_x^1 h(t) dt.$$

(a) Beargumenteer dat h continu is op $(0, \infty)$.

(b) Is h differentieerbaar op $(0, \infty)$?

(c) Toon aan dat

$$|h(t)| \leq 2 |\ln t|, \quad \text{voor alle } t \in (0, \frac{1}{2}).$$

(d) Toon aan dat de integraal voor $H(x)$ convergeert voor alle $x \in [0, \infty)$.

(e) Formuleer de hoofdstelling van de integraalrekening.

(f) Beargumenteer dat H differentieerbaar is op $(0, \infty)$ en bepaal H' .

(g) Toon aan dat H concaaf is op $(1, \infty)$.

(h) Geef de Taylorreeks van H rond het punt 1. Wat is de convergentie straal?

Opgave	1	2	3	4	Totaal
Punten	8	11	11	15	45
	(4+1+3)	(3+3+5)	(3+3+5)	(2+2+1+2+1+1+3+3)	

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Aantal punten} + 5}{5}$$