

== Uitwerkingen Tentamen Analyse 1, WI1600 ==

Maandag 11 januari 2010, 9.00-12.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studienummer.
 - Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
 - Het gebruik van een (grafische) rekenmachine en het TU Delft formuleblad is toegestaan. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
 - Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.
-

1. Beschouw de functie $f : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\sin(x) + 2}\right).$$

- Bepaal de aard (maximum, minimum, lokaal, globaal), plaats en grootte van de extremen van f .
- Laat de functie g de beperking zijn van f tot het interval $[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi]$. Toon aan dat g inverseerbaar is.
- Geef een expliciet functie voorschrift voor g^{-1} . Wat is het domein van g^{-1} ?

Uitwerking

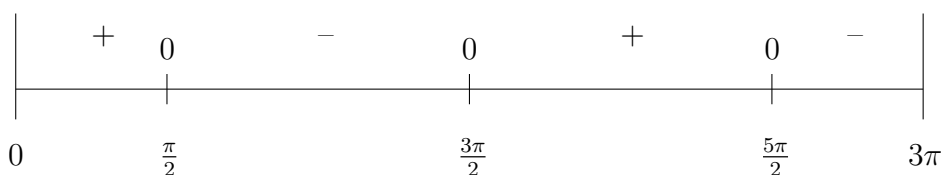
- Met behulp van de kettingregel vinden we de afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\sin(x) + 2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin(x) + 2}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2(3 + \sin(x))\sqrt{\sin(x) + 2}}.$$

We zien dat $f'(x)$ de volgende nulpunten heeft binnen het interval $[0, 3\pi]$:

$$\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2}.$$

Maak een tekenoverzicht van f' om af te lezen of f maxima of minima heeft in de nulpunten van f' :



We zien nu dat f een lokaal maximum heeft in $x = \frac{\pi}{2}$, en $x = \frac{5\pi}{2}$. De grootte is $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{5\pi}{2}) = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Dit zijn dus tevens twee globale maxima. Verder zien we dat f lokale minima heeft in $x = \frac{3\pi}{2}$ met grootte $f(\frac{3\pi}{2}) = \arctan(\sqrt{1}) = \frac{\pi}{4}$, en in de randpunten $x = 0$ en $x = 3\pi$ met grootte $f(0) = f(3\pi) = \arctan(\sqrt{2})$. De functie f heeft dus een globaal minimum in $x = \frac{3\pi}{2}$.

(b) Uit het tekenoverzicht in (a) zien we dat $g'(x) > 0$ voor alle $x \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$, dus g is injectief en daarom inverteerbaar.

(c) We schrijven $y = f(x) = \arctan(\sqrt{\sin(x) + 2})$, dan volgt

$$\tan y = \sqrt{\sin(x) + 2} \Rightarrow \tan^2 y = \sin(x) + 2 \Rightarrow \tan^2 y - 2 = \sin(x).$$

Nu gaan we de arcsin toepassen. Merk hiervoor op dat het bereik van $\arcsin x$ het interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ is, maar $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$. We moeten dus eerst het argument in $\sin(x)$ verschuiven: $\sin(x) = \sin(x - 2\pi)$. Nu volgt

$$\arcsin(\tan^2 y - 2) = x - 2\pi.$$

De inverse functie g^{-1} wordt dus gegeven door

$$g^{-1}(y) = \arcsin(\tan^2 y - 2) + 2\pi.$$

Het domein van g^{-1} is het bereik van g : $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$.

2. Bepaal of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} + \cos(n)}{2n^2 - 1}$$

Bepaal het convergentie interval van de volgende machtreeks:

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}} (x-1)^{n-1}.$$

Uitwerking

(a) We gebruiken het integraal kenmerk. De rij $a_n = \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$ daalt vanaf $n = 3$, dus we gaan integreren vanaf $x = 3$ (of een grotere x). Met de substitutie $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x} dx$, volgt

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_3^t \frac{1}{x \ln(x) \ln(\ln(x))} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\ln 3}^{\ln t} \frac{1}{u \ln(u)} du.$$

We gebruiken nu de substitutie $v = \ln u$, $dv = \frac{1}{u} du$, dan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\ln 3}^{\ln t} \frac{1}{u \ln(u)} du = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln t)} \frac{1}{v} dv = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln v \Big|_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln t)} = \infty.$$

De integraal is divergent, en de reeks is dus ook divergent.

(b) We gebruiken het limieten kenmerk met $a_n = \frac{\sqrt{n+2} + \cos(n)}{2n^2 - 1}$ en $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n(n+2)} + n\sqrt{n} \cos(n)}{2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n+2}{n}} + \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{1} + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Aangezien $0 < L < \infty$ en $\sum b_n$ convergent is (een p -reeks met $p = \frac{3}{2}$), is $\sum a_n$ ook convergent. Omdat $a_n > 0$ voor alle n , is de reeks dus ook absoluut convergent.

(c) We schrijven de reeks als $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en gebruiken het quotiënten kenmerk:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x - 1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}.$$

Met behulp van standaardlimiet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ vinden we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} \frac{\frac{1}{n}}{\sin(\frac{1}{n})} \frac{n+1}{n} = 1,$$

en dan volgt $\rho = |x - 1|$. De reeks convergeert absoluut als $\rho = |x - 1| < 1$, de convergentiestraal is dus 1. Voor $x = 0$ krijgen we de reeks

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}.$$

We gebruiken het limieten kenmerk met $a_n = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}$ en $b_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Aangezien $0 < L < \infty$ en de reeks $\sum b_n$ convergent is, is de reeks $\sum a_n$ ook convergent.

Voor $x = 2$ krijgen we de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}.$$

Deze is absoluut convergent.

Het convergentie interval is dus $[0, 2]$.

3. Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal

$$(a) \int_0^1 \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} dx \quad (b) \int \frac{x^3 - 4x + 1}{x-2} dx \quad (c) \int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$$

Hint bij (c): bepaal eerst een primitieve.

Uitwerking

- (a) Gebruik de substitutie $u = \arctan(x)$, $du = \frac{1}{x^2+1}dx$, dan

$$\int_0^1 \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} e^u du = e^u \Big|_0^{\pi/4} = e^{\pi/4} - 1.$$

- (b) Schrijf de integrand eerst om (bijvoorbeeld met een staartdeling), dan

$$\int \frac{x^3 - 4x + 1}{x - 2} dx = \int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x-2} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \ln|x-2| + C,$$

of om precies te zijn de primitieve is

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \ln(x-2) + C_1, & \quad \text{voor } x > 2, \\ \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \ln(2-x) + C_2, & \quad \text{voor } x < 2, \end{aligned}$$

waarbij C_1 en C_2 verschillende constanten zijn.

- (c) Primitieveer eerst de functie $\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}$ met partieel integreren. Neem $u = \ln x$ en $dv = \frac{1}{(x+1)^2}dx$, dan $du = \frac{1}{x}dx$ en $v = -\frac{1}{x+1}$:

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx.$$

We gaan nu breuksplitsen:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)}.$$

Dit geeft de vergelijkingen $a = 1$ en $a + b = 0$, dus $b = -1$. We vinden dus (voor $x > 0$)

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx &= -\frac{\ln x}{x+1} + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + C \\ &= \frac{x \ln x}{x+1} - \ln(x+1) + C. \end{aligned}$$

Nu vinden we

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{x \ln x}{x+1} - \ln(x+1) \right) \Big|_t^1 = \lim_{t \downarrow 0} \left(-\ln 2 + \ln(t+1) - \frac{t \ln t}{t+1} \right) = -\ln 2.$$

4. De functie $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\ln t}{1-t}, & t \neq 1, \\ -1, & t = 1. \end{cases}$$

We definiëren hiermee de functie $H : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$H(x) = \int_x^1 h(t) dt.$$

(a) Beargumenteer dat h continu is op $(0, \infty)$.

(b) Is h differentieerbaar op $(0, \infty)$?

(c) Toon aan dat

$$|h(t)| \leq 2|\ln t|, \quad \text{voor alle } t \in (0, \frac{1}{2}).$$

(d) Toon aan dat de integraal voor $H(x)$ convergeert voor alle $x \in [0, \infty)$.

(e) Beargumenteer dat H differentieerbaar is op $(0, \infty)$ en bepaal H' .

(f) Toon aan dat H concaaf is op $(1, \infty)$.

(g) Geef de Taylorreeks van H rond het punt 1. Wat is de convergentie straal?

Uitwerking

(a) De functies $\ln t$ en $t - 1$ zijn beide continu, dus het quotiënt is ook continu, mits $t - 1 \neq 0$. Voor $t = 1$ volgt met de regel van l'Hôpital

$$\lim_{t \rightarrow 1} h(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{1 - t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1/t}{-1} = -1 = h(1),$$

dus h is ook continu in 1.

(b) De functies $\ln t$ en $1 - t$ zijn beide differentieerbaar, dus volgens de quotiëntregel is h voor $t \neq 1$ differentieerbaar. Voor $t = 1$ berekenen we

$$h'(1) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h(1+k) - h(1)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(\frac{\ln(1+k)}{-k} + 1 \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k - \ln(1+k)}{k^2}.$$

Met behulp van het tweede orde Taylor polynoom van $\ln(1+k)$ vinden we dan

$$h'(1) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k - \left(k - \frac{k^2}{2} + \mathcal{O}(k^3)\right)}{k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(k) = \frac{1}{2}.$$

Dus h is differentieerbaar op $(0, \infty)$.

(c) Voor $t \in (0, \frac{1}{2})$ geldt er $\frac{1}{1-t} < \frac{1}{1/2} = 2$, dus

$$|h(t)| = \frac{|\ln t|}{1-t} < 2|\ln t|.$$

(d) Aangezien h continu is op $(0, \infty)$, is de integraal voor $H(x)$ een (gewone) bepaalde integraal als $x \neq 0$. Dus de integraal convergeert in ieder geval voor alle $x \in (0, \infty)$. Voor $x = 0$ is het een oneigenlijke integraal, omdat $\ln(t)$ niet bestaat voor $t = 0$. Uit (c) volgt nu

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(t) dt = \lim_{c \downarrow 0} (t \ln t - t) \Big|_c^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2},$$

dus de oneigenlijke integraal $\int_0^{\frac{1}{2}} h(t) dt$ is convergent, en dus is de oneigenlijke integraal voor $H(0)$ ook convergent.

(e) Als f continu is op het interval I en $c \in I$, dan is de functie

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in I,$$

differentieerbaar op I en $F'(x) = f(x)$.

(f) De functie $h(t)$ is continu, dus volgens de hoofdstelling van de integraalrekening is de functie $H(x) = -\int_1^x h(t)dt$ differentieerbaar met afgeleide $H'(x) = -h(x)$.

(g) Voor $x > 1$ geldt

$$H''(x) = -h'(x) = -\frac{(1-x)\frac{1}{x} + \ln(x)}{(1-x)^2} = -\frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{(1-x)^2}.$$

We gaan de Middelwaardestelling gebruiken om te laten zien dat $H''(x) < 0$. De functie $\ln t$ is continu op $[1, x]$ en differentieerbaar op $(1, x)$, dus er bestaat een $c \in (1, x)$ waarvoor geldt

$$\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{1}{c}.$$

Omdat $\frac{1}{c} > \frac{1}{x}$ volgt nu

$$\frac{\ln x}{x - 1} > \frac{1}{x},$$

en dus

$$\ln x - \frac{x-1}{x} > 0.$$

Nu zien we dat $H''(x) < 0$ voor alle $x > 1$, dus H is concaaf op $(1, \infty)$.

Een alternatieve manier om te laten zien dat $\ln x - \frac{x-1}{x} > 0$ is de volgende. Bekijk de functie $f(t) = \frac{1}{t}$ op het interval $[1, x]$. Voor het oppervlak O onder de grafiek van f geldt nu

$$O = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x.$$

Verder geldt, omdat $\frac{1}{x}$ het minimum is van f op $[1, x]$, dat O groter is dan het oppervlak van de rechthoek met hoogte $\frac{1}{x}$ en lengte $x - 1$. Dus

$$\ln(x) > \frac{x-1}{x}.$$

(h) We bepalen eerst de Taylorreeks van h rond het punt 1. De Taylorreeks van $\ln(1+x)$ rond 0 wordt gegeven door $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ voor $|x| < 1$, dus

$$\ln t = \ln(1 + (t-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(t-1)^n}{n}, \quad |t-1| < 1,$$

en dan volgt de Taylorreeks voor h rond 1:

$$\frac{\ln t}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(t-1)^{n-1}}{n}, \quad |t-1| < 1.$$

Voor $t = 1$ is deze reeks gelijk aan -1 . Binnen de convergentiestraal mogen we termsgewijs integreren, dus voor $x \in (0, 2)$

$$H(x) = \int_x^1 h(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_x^1 (t-1)^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (x-1)^n.$$

Dit geeft de Taylorreeks van H rond 1. De convergentiestraal verandert niet door te integreren, dus de convergentiestraal is 1.

Opgave	1	2	3	4	Totaal
Punten	8	11	11	15	45
	(4+1+3)	(3+3+5)	(3+3+5)	(2+2+1+2+1+1+3+3)	

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Aantal punten} + 5}{5}$$