

== Tentamen Analyse 1 ==

Maandag 14 januari 2008, 14.00-17.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studienummer.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine en het TU Delft formuleblad is toegestaan. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

Succes!

- 1.) (a) Formuleer de Tussenwaardestelling.
(b) Toon aan, dat de vergelijking $\ln(x) = \sin(x)$ minimaal één oplossing heeft.
- 2.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(2n)!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}, \quad (c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\sqrt{\ln n}}.$$

- 3.) Beschouw de functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) := \int_0^{\sqrt{\ln(x+1)}} e^{t^2} dt.$$

- (a) Beargumenteer, dat f differentieerbaar is op $(0, \infty)$ en bereken f' .
- (b) Bewijs dat f concaaf is op $[0, \infty)$.

- 4.) Bereken

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta e^{-\sin \theta} d\theta, \quad (b) \int_0^1 \frac{3x^2 - x + 2}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

en de oneigenlijke integraal

$$(c) \int_0^1 \ln(x^2 - x^4) dx.$$

***** Zie ommezijde voor vervolg *****

5.) (a) Bewijs dat de Taylorreeks rond het punt 2 van de functie $\ln x$ gegeven wordt door

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x-2}{2} \right)^n, \quad (1)$$

en bepaal de convergentiestraal (rond $x = 2$).

(b) Laat $T_n(x)$ het n -de orde Taylorpolynoom zijn van de functie $\ln x$ rond $x = 2$. Laat zien, dat voor de restterm $R_n(x) = \ln x - T_n(x)$ geldt

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1} \quad \text{voor alle } x : |x-2| < 1,$$

en concludeer dat voor $|x-2| < 1$ de functie $\ln x$ gelijk is aan de reeks (1).

(c) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\ln(x/2)}{(x-2)^2} - \frac{1}{2x-4} \right).$$

Opgave	1	2	3	4	5
Punten	1+2	2+2+2	2+2	2+2+3	3+2+2