

Proeftentamen Analyse 1, WI1600
december 2007

1. (a) Schrijf het complexe getal $(1 + i\sqrt{3})^{25}$ in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.
(b) Los op $z^2 + z + 1 = 0$.

2. De functies $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zijn gedefinieerd door

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- (a) Toon aan dat

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1.$$

- (b) Laat zien dat de functie $\cosh(x)$ injectief is op $[0, \infty)$.

- (c) De functie $\cosh^{-1}(x)$ is de inverse functie van $\cosh(x)$ op $[0, \infty)$. Toon aan dat

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

3. Bewijs de volgende ongelijkheid:

$$\left| \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. (a) Is $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2 + 4}}$ voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent?

- (b) Bepaal voor welke $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \left(\frac{x+1}{3}\right)^n$ convergeert.

5. Beschouw de functie

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - 2x.$$

- (a) Bepaal de (horizontale of scheve) asymptoot voor $x \rightarrow \infty$.

- (b) Bepaal de aard (minimum, maximum, globaal, lokaal) en de grootte van de extreme waarden van f op $[0, \infty)$.

6. Bereken

$$(a) \int_1^2 \frac{x^2 - x - 1}{x^2(x-1)} dx \qquad (b) \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

7. (a) Geef de Taylorreeks rond het punt -1 van de functie $\frac{1}{1-x}$.

- (b) Bewijs:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$$