

Uitwerking Tentamen lineaire algebra 1 deel B, wi1602-B, donderdag 10 januari 2013.

1. (a) A is een onderdriehoeksmatrix. De drie eigenwaarden van A staan dus op de diagonaal en zijn 2, 5 en -4 . Ze zijn allemaal verschillend, waardoor A zeker diagonaliseerbaar is.

De eigenwaarden van B moeten berekend worden via $\det(B - \lambda I) = 0$. Berekening van deze determinant door te ontwikkelen naar de tweede kolom levert de karakteristieke vergelijking $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$, ofwel $(1 - \lambda)(\lambda - 1)^2 = 0$. Deze matrix heeft dus één eigenwaarde (namelijk 1) met algebraïsche multipliciteit 3. De meetkundige multipliciteit is de dimensie van $\text{Nul}(B - 1I)$ en dus gelijk aan het aantal kolommen zonder pivot in een echelonvorm bij

$$B - I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De meetkundige multipliciteit is dus 1, ongelijk aan de algebraïsche. B is daarom niet diagonaliseerbaar.

C is symmetrisch en dus diagonaliseerbaar (zelfs orthogonaal diagonaliseerbaar).

- (b) Er is af te lezen dat de matrix A uit het linkerlid de eigenwaarden 2 ($2 \times$) en 5 ($1 \times$) heeft. Verder is

$$E_2 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{en} \quad E_5 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dus $[-1, 1, -1]^T$ is ook een eigenvector bij eigenwaarde 5 (behoort namelijk tot E_5). Verder is $[0, 1, 1]^T$ een eigenvector bij eigenwaarde 2, want die behoort tot E_2 , evenals $[1, 0, 1]^T$. Bovendien zijn de laatste twee vectoren onafhankelijk. De kolommen van

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

vormen dus een eigenbasis voor $\mathbb{R}^3$ bij matrix A en in de diagonaalmatrix van het rechterlid staan de corresponderende eigenwaarden. Conclusie: het rechterlid is een diagonalisering van A , en dus gelijk aan A (hel linkerlid). Conclusie: waar!

2. (a) Hier hoeft je de orthogonale projectie niet meer te berekenen, maar slechts te controleren dat het werkelijk de orthogonale projectie is, en dat gaat met de definitie van orthogonale projectie veel sneller dan het (opnieuw) berekenen ervan via een orthogonale basis. Je moet dus nagaan dat $\mathbf{p}$ tot $W = \text{Col } A$ behoort (en dat is zo want $\mathbf{p}$ is zeven keer de eerste minus twee keer de derde kolom van A), en dat $\mathbf{b} - \mathbf{p} \perp \text{Col } A$. Ook dat is zo omdat $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ loodrecht op alle kolommen van A staat (bereken de drie inwendig producten van $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ maar met de drie kolommen van A).
- (b) Die afstand is $\|\mathbf{b} - \mathbf{p}\| = \|[0, 1, -3, 2]^T\| = \sqrt{14}$.
- (c) Die matrix is $B(B^T B)^{-1} B^T$, waarbij B een matrix is met onafhankelijke kolommen zo dat $\text{Col } B = W = \text{Col } A$. Bijvoorbeeld

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Als je B zo kiest dat de kolommen een orthonormale basis voor $\text{Col } A$ vormen, dan is $B^T B = I$ en is de gevraagde matrix $B B^T$.

- (d) Dat is de vector $\mathbf{p}' = \mathbf{b} - \mathbf{p} = [0, 1, -3, 2]^T$. Immers, deze zit in $W^\perp$ en $\mathbf{b} - \mathbf{p}' = \mathbf{p}$ en die staat loodrecht op $W^\perp$, want $(W^\perp)^\perp = W$ en $\mathbf{p} \in W$.
- (e) Er geldt dat de dimensie van $W = \text{Col } A$ twee is (want er zijn twee onafhankelijke kolommen, de derde is namelijk een combinatie van de eerste twee en de eerste twee zijn onafhankelijk omdat ze geen veelvouden van elkaar zijn; je kunt ook het aantal pivotposities van A bepalen door te vegen, dan zie je dat er twee pivots zijn en de dimensie van $\text{Col } A$ is gelijk aan het aantal pivots). Omdat $\dim W + \dim W^\perp = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ volgt dat $\dim W^\perp$ ook twee is.
3. (a) Merk op dat $A_3 = -\frac{3}{2}A_1$ dus (bijvoorbeeld) A_3 kan verwijderd worden zonder dat V verandert, d.w.z.

$$V = \text{Span}\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\} = \text{Span}\{A_1, A_2, A_4, A_5, A_6\}.$$

Verder is $A_4 = A_1 + A_2$ dus ook deze kan verwijderd worden. Tenslotte geldt $A_6 = A_1 + A_2 + A_5$. We hebben dus

$$V = \text{Span}\{A_1, A_2, A_5\},$$

wat betekent dat B_1 heel V opspant. Rest aan te tonen dat de drie matrices onafhankelijk zijn. Beschouw dus de vectorvergelijking $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_5 = 0$ (de nulmatrix!). Herschrijven geeft

$$\begin{bmatrix} -2c_1 + 2c_2 & 4c_1 - 4c_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dus $-2c_1 + 2c_2 = 0$, $4c_1 - 4c_3 = 0$, $c_2 = 0$ en $c_3 = 0$. Hieruit volgt snel dat alle drie de c_i nul moeten zijn en dus zijn de drie overgebleven matrices onafhankelijk. Omdat ze V ook opspannen ze een basis voor V .

Opmerking: deze opgave kan ook gemaakt worden via coördinatisering van de matrices t.o.v. de standaardbasis voor $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (b) De dimensie van V is 3 (want een basis bestaat volgens (a) uit drie vectoren) en het is bekend dat de dimensie van $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ vier is. Ze zijn dus niet gelijk.
- (c) Het aantal vectoren in B_2 is gelijk aan drie, dus gelijk aan de dimensie van V . Verder behoren ze alle drie tot V want de eerste is $-\frac{1}{2}A_1$, de tweede is A_4 en de derde is A_6 . Tenslotte zijn het onafhankelijke polynomen want uit de vectorvergelijking

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

volgt $c_1 = 0$, $-2c_1 + 4c_2 = 0$, $c_2 + c_3 = 0$ en $c_3 = 0$. Maar dan moeten alle drie de c_i nul zijn. Conclusie: B_2 is een basis voor V .

- (d) Noem de matrices uit B_2 achtereenvolgens D_1 , D_2 en D_3 . Uit het voorgaande volgt dan dat

$$D_1 = -\frac{1}{2}A_1, \quad D_2 = A_1 + A_2 \quad \text{en} \quad D_3 = A_1 + A_2 + A_5,$$

zodat

$$[D_1]_{B_1} = [-1/2, 0, 0]^T, \quad [D_2]_{B_1} = [1, 1, 0]^T, \quad \text{en} \quad [D_3]_{B_1} = [1, 1, 1]^T.$$

Dus

$$C_{B_1 \leftarrow B_2} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(e) \quad [\mathcal{L}]_{B_1 \leftarrow B_2} = [\mathcal{L}]_{B_1 \leftarrow B_1 B_1 \leftarrow B_2} C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(f) \quad \text{Uit het gegeven volgt dat } A = 1D_1 - 1D_2 + 1D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ en}$$

$$[\mathcal{L}(A)]_{B_1} = [\mathcal{L}]_{B_1 \leftarrow B_2} [A]_{B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{zodat } \mathcal{L}(A) = -3A_1 + 2A_2 - A_5 = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Een andere manier: Bepaal met behulp van A de coördinaten $[A]_{B_1}$. Dan $[\mathcal{L}(A)]_{B_1} = [\mathcal{L}]_{B_1 \leftarrow B_1} [A]_{B_1}$.

4. (a) Niet waar: orthogonale matrices hoeven niet symmetrisch te zijn en een niet-symmetrische matrix is niet orthogonaal diagonaliseerbaar. Een voorbeeld van een niet-symmetrische (en dus niet orthogonaal diagonaliseerbare) orthogonale matrix is

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Waar: Stel U en V zijn orthogonale matrices. Dan geldt dat $U^T = U^{-1}$ en $V^T = V^{-1}$. Er volgt dat $(UV)^T = V^T U^T = V^{-1} U^{-1} = (UV)^{-1}$. De getransponeerde van UV is dus de inverse van UV en dat betekent dat UV een orthogonale matrix is.
- (c) Ja!! De nulvector zit in die deelverzameling, want die heeft nul kentallen ongelijk aan nul en dus eindig veel. Als je twee rijtjes optelt waarin maar eindig veel kentallen ongelijk aan nul zijn, zeg $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, 0, 0, \dots)$ en $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_l, 0, 0, 0, \dots)$ dan heeft de som ook maar eindig veel kentallen ongelijk aan nul, immers na de index $\max\{k, l\}$ geldt dat alle kentallen nul zijn. Als je een $\mathbf{x}$ met een scalar c vermenigvuldigt, krijg je $c\mathbf{x} = (cx_1, \dots, cx_k, 0, 0, 0, \dots)$ en deze heeft duidelijk ook maar eindig veel kentallen ongelijk aan nul.