

Tentamen lineaire algebra 1 deel B, wi1602-B
donderdag 10 januari 2013, 9.00-11.00 uur.

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden.

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vier op te tellen en vervolgens te delen door vier.

- (6) 1. (a) Welke van de volgende matrices zijn diagonaliseerbaar en welke niet? Vergeet niet je antwoord te beargumenteren! Let op: je hoeft geen diagonalisering te geven.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (3) (b) Waar of niet waar? (Leg uit!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

2. Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Verder is W de kolomruimte van de matrix A .

- (2) (a) Laat zien dat $\mathbf{p}$ de loodrechte projectie van $\mathbf{b}$ op W is.
(1) (b) Wat is de afstand van $\mathbf{b}$ tot W ?
(2) (c) Leg uit hoe de matrix van de orthogonale projectie op W berekend kan worden. Je hoeft de matrix dus niet uit te rekenen, schrijven als formule met bekende matrices is voldoende!
(2) (d) Bepaal de projectie van $\mathbf{b}$ op het orthogonale complement van W . Dit kan met heel weinig rekenwerk!!
(2) (e) Wat is de dimensie van het orthogonale complement van W ?

3. In $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ wordt de deelruimte $V = \text{Span}\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ gegeven, waarbij

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (2½) (a) Laat zien dat $B_1 = \{A_1, A_2, A_5\}$ een basis is voor V .
- (1) (b) Is V gelijk aan $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$? Vergeet niet je antwoord uit te leggen!
- (2½) (c) Toon aan dat $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ ook een basis voor V is.
- (2) (d) Bepaal de overgangsmatrix $C_{B_1 \leftarrow B_2}$.
- (2) (e) Bepaal $[\mathcal{L}]_{B_1 \leftarrow B_2}$ als van de lineaire afbeelding $\mathcal{L} : V \rightarrow V$ gegeven is dat

$$[\mathcal{L}]_{B_1 \leftarrow B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (2) (f) Voor de matrix A uit V geldt $[A]_{B_2} = [1, -1, 1]^T$. Bepaal A en $\mathcal{L}(A)$.

4. Bewijs of weerleg:

- (2) (a) Orthogonale matrices zijn orthogonaal diagonaliseerbaar.
- (2) (b) Als U en V orthogonale matrices zijn, dan is UV ook een orthogonale matrix.
- (2) (c) Is de deelverzameling van $\mathbb{R}^\infty$ die bestaat uit de rijtjes waarin slechts eindig veel kentallen ongelijk aan nul zijn een deelruimte van $\mathbb{R}^\infty$?