

Tentamen lineaire algebra 1 deel A, wi1602-A
 vrijdag 9 november 2012, 9.00-11.00 uur.

ELK ANTWOORD DIEN TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als mobiele telefoons, laptops, formulebladen en dergelijke gebruikt worden. Alleen een rekenmachine die ook op het VWO gebruikt mag worden is toegestaan. Hierin mag geen informatie opgeslagen zijn!!

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten vier op te tellen en vervolgens te delen door vier.

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 \\ -2 & \alpha^2 + 2\alpha & -2 & 5 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \beta \end{bmatrix}$ waarbij α en β reële getallen zijn.

- (2) (a) Het is bekend dat het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen, één of oneindig veel oplossingen heeft. Zonder te rekenen is echter duidelijk dat één van deze drie mogelijkheden af valt. Welke? Waarom?
- (3) (b) Voor welke waarden van α en β heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ géén oplossingen?
- (2) (c) Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op voor $\alpha = 0$ en $\beta = 3$.
- (2) (d) Voor welke waarden van α spannen de kolommen van A heel $\mathbb{R}^3$ op?

- (1½) 2. (a) Laat A een $m \times n$ -matrix zijn. Vul de volgende definitie aan: de nulruimte van A is
 Neem vervolgens

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- (1½) (b) Is $\mathbf{b} \in \text{Col}(A)$? En $\mathbf{p}$?
- (2) (c) Bepaal de rang van A en daarmee de dimensies van $\text{Row}(A)$, $\text{Col}(A)$, $\text{Nul}(A)$ en $\text{Nul}(A^T)$.
 Leg uit!
- (2) (d) Is $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ een basis voor $\text{Nul}(A)$?
- (1) (e) Geef een 3×4 matrix B zo dat $\text{Nul}(A) = \text{Row}(B)$.

- (2) 3. (a) Bestaat er een lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met de eigenschap dat

$$T([1, 2, 1]^T) = [1, 1]^T, \quad T([-1, 3, 2]^T) = [-1, 1]^T \quad \text{en} \quad T([3, 1, 0]^T) = [3, -1]^T?$$

- (2) (b) Gegeven is dat A een inverteerbare 4×4 matrix is. Bepaal $\det(2A^T A^{-1})$.
- (2) (c) De verzameling V bestaat uit de vectoren van $\mathbb{R}^2$ die in het tweede en vierde kwadrant liggen (dat zijn de vectoren $(x, y)^T$ met $xy \leq 0$). Is V dan een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^2$?

4. Beschouw de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (2) (a) Is $\mathbf{v}$ een eigenvector van A ? En $\mathbf{w}$?
- (2) (b) We geven dat -1 een eigenwaarde van A is. Bepaal de algebraïsche multipliciteit hiervan.
- (2) (c) Leg uit dat er bij A een eigenbasis bestaat en geef zo'n basis (dat is dus een basis voor $\mathbb{R}^3$ die volledig uit eigenvectoren bestaat).
- (2) (d) Bereken $A^{481}\mathbf{x}$.

5. Neem aan dat A een $m \times n$ matrix is waarbij $n \times m$ matrices B en C bestaan zo dat $AB = I_m$ en $CA = I_n$.

- (2) (a) Toon aan: voor elke $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ is de vector $B\mathbf{b}$ een oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wat betekent dit voor het aantal pivots van A met betrekking tot het aantal rijen en/of kolommen van A ?
- (2) (b) Toon aan: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ heeft precies één oplossing. Wat betekent dit voor het aantal pivots van A ?
- (1) (c) Toon met behulp van (a) en (b) aan dat A vierkant is.

[Opmerking: Je hebt nu aangetoond dat niet-vierkante matrices nooit inverteerbaar kunnen zijn.]