

Uitwerking Tentamen lineaire algebra 1 deel A, wi1602-A, vrijdag 9 november 2012.

1. (a) Omdat A drie rijen heeft zijn er hooguit drie pivots. De matrix heeft vier kolommen zodat er altijd tenminste één kolom geen pivot heeft. De consistente stelsels hebben dus altijd oneindig veel oplossingen. Blijkbaar valt de mogelijkheid van het hebben van één oplossing af.

- (b) Ga na dat

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha^2 + 2\alpha & -2 & 5 & \beta \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 - \alpha & -\alpha + \beta + 2 \end{array} \right]$$

Onderscheid nu de gevallen $\alpha = 0$, $\alpha = 5$ en de overige mogelijkheden.

Invullen van $\alpha = 0$ levert nog geen echelonvorm, er moet dus verder geveegd worden:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \beta + 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 3 \end{array} \right].$$

Blijkbaar zijn er geen oplossingen als $\beta \neq 3$.

Invullen van $\alpha = 5$ levert de echelonvorm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - 3 \end{array} \right]$$

en dit stelsel heeft voor $\beta \neq 3$ geen oplossing.

Voor alle andere α is de eerst gevonden matrix een echelonvorm die in elke rij een pivot heeft, zodat het stelsel in die situatie altijd tenminste één oplossing heeft. Omdat de derde kolom nooit een pivot heeft zijn er zelfs oneindig veel oplossingen. *Conclusie:* geen oplossing als $\alpha = 0$ en $\beta \neq 3$ en ook geen oplossing als $\alpha = 5$ en $\beta \neq 3$.

- (c) Veeg de hierboven gevonden echelonvorm voor $\alpha = 0$ door tot gereduceerde echelonvorm, na invullen van $\beta = 3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dit leidt tot de vrije variabelen x_2 en x_3 en de twee vergelijkingen $x_1 + x_3 = 1$ en $x_4 = 1$. Uitdrukken van de vier variabelen in de twee vrije levert vervolgens $x_1 = 1 - x_3$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$ en $x_4 = 1$. De oplossing is dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (d) De kolommen spannen $\mathbb{R}^3$ op als en slechts als $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^3$ dus als en slechts als de dimensie van $\text{Col}(A)$ gelijk is aan 3. En dit geldt alleen als A (na vegen) drie pivots heeft. Volgens (a) is dat het geval als $\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq 5$.

Een andere (wat omslachtigere) methode: vul A aan met de vector $(b_1, b_2, b_3)^T$, veeg tot echelonvorm en kies α zo dat dit stelsel een oplossing heeft voor alle keuzen van b_1 , b_2 en b_3 (zie de opgaven E1.4.3, 4 en 5).

Bij het behandelen van genoemde opgaven tijdens een instructie heb ik nog een methode gegeven: de kolommen van A spannen heel $\mathbb{R}^3$ op precies als A na vegen geen nulrij heeft. En dat is het geval voor $\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq 5$.

2. (a) De nulruimte van A is de oplossingsverzameling van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (b) De vraag is of $\mathbf{b}$ een lineaire combinatie van de kolommen is. Door inspectie zag ik dat $\mathbf{b}$ gelijk is aan de tweede min 2 keer de derde kolom (als je dat niet ziet moet je nagaan of het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ een oplossing heeft) en dus behoort $\mathbf{b}$ tot $\text{Col}(A)$. Omdat $\text{Col}(A)$ uit lineaire combinaties van de kolommen van A bestaat, bevat het slechts vectoren uit $\mathbb{R}^4$, zodat $\mathbf{p}$ onmogelijk tot $\text{Col}(A)$ kan behoren.

- (c) Ga na dat

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De rang van A is gelijk aan het aantal pivots en is dus 2. Verder geldt

$$\dim \text{Row}(A) = \dim \text{Col}(A) = \text{Rank}(A) = 2$$

$$\dim \text{Nul}(A) = \text{aantal kolommen van } A - \text{Rank}(A) = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Nul}(A^T) &= \text{aantal kolommen van } A^T - \text{Rank}(A^T) \\ &= 3 - \dim \text{Col}(A^T) = 3 - \dim \text{Row}(A) = 1 \end{aligned}$$

- (d) Net is gezien dat $\dim \text{Nul}(A) = 2$, waardoor we weten dat twee onafhankelijk vectoren uit $\text{Nul}(A)$ een basis vormen voor $\text{Nul}(A)$. Het is duidelijk dat $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ uit twee onafhankelijke vectoren bestaat (het zijn immers geen veelvouden van elkaar). Ga verder na dat $A\mathbf{p} = A\mathbf{q} = \mathbf{0}$, waaruit blijkt dat $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ tot $\text{Nul}(A)$ behoren. Klaar!
- (e) Je moet een matrix bedenken waarvan de drie rijen $\text{Nul}(A)$ opspannen. Hiervoor zijn vele mogelijkheden. Het handigst is het om $\mathbf{p}^T$ als eerste en $\mathbf{q}^T$ als tweede rij te nemen. Als derde rij neem je een combinatie van $\mathbf{p}^T$ en $\mathbf{q}^T$, bijvoorbeeld de nulrij. Je krijgt dan

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Merk op dat

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Als er een lineaire afbeelding T zou bestaan met genoemde eigenschappen, dan zou gelden

$$T \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T \left(2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 2T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - T \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Echter, $T([3, 1, 0]^T) = [3, -1]^T \neq [3, 1]^T$.

- (b) Omdat A een 4×4 matrix is, moet gelden dat

$$\det(2A^T A^{-1}) = 2^4 \det(A^T A^{-1}) = 2^4 \det(A^T) \det(A^{-1}) = 2^4 \det(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = 16.$$

- (c) V is geen deelruimte want V is niet gesloten onder optelling. Er geldt bijvoorbeeld dat de vectoren $[-2, 1]^T$ (tweede kwadrant) en $[1, -2]^T$ (vierde kwadrant) tot V behoren, maar de som $[-1, -1]^T$ (derde kwadrant) niet.

4. (a) $A\mathbf{v} = (0, 0, 0)^T = 0\mathbf{v}$ en $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Blijkbaar is $\mathbf{v}$ een eigenvector van A bij eigenwaarde 0. $A\mathbf{w} = (-1, 1, -4)^T = -1\mathbf{w}$ en $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, dus ook $\mathbf{w}$ is een eigenvector van A , bij eigenwaarde -1 .
- (b) (Bij onderdeel (a) hebben we al gezien dat -1 een eigenwaarde is.) Een manier om de algebraïsche multiplicitéit te bepalen, is het uitrekenen van $\det(A - \lambda I)$:

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2 - \lambda & -1 \\ 3 & -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & -2 - \lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda(-1 - \lambda)^2$$

(bij de eerste stap zijn de tweede en derde kolom bij de eerste kolom opgeteld, wat toegestaan is omdat bij determinanten ook met kolommen geveegd mag worden). We zien dat de algebraïsche multiplicitéit van de eigenwaarde -1 twee is.

We hadden ook de eigenruimte bij eigenwaarde -1 kunnen bepalen (zie de uitwerking van onderdeel (c)). Dan ontdek je dat deze dimensie 2 heeft, wat betekent dat m.m. $(-1) = 2$. Da algebraïsche multiplicitéit is dus 2 of 3. Echter, er is nog een eigenwaarde (namelijk 0). De som van de algebraïsche multiplicitéiten is 3, die van 0 tenminste 1, en dus moet a.m. $(-1) = 2$.

- (c) De eigenwaarden zijn 0 en -1 . De algebraïsche multiplicitéit van eigenwaarde 0 is één, de meetkundige dus ook. Dat betekent dat de dimensie van de eigenruimte bij ew 0 dus ook één is. Bij onderdeel (a) is al een eigenvector bij deze ew gegeven, dus $E_0 = \text{Span}\{(1, 1, 1)^T\}$. Om de eigenruimte bij ew -1 te bepalen moet het stelsel $(A - (-1)I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ opgelost worden. Dat levert $E_{-1} = \text{Span}\{(1, 3, 0)^T, (1, 0, 3)^T\}$. We zien dat voor beide eigenwaarden geldt dat de algebraïsche en meetkundige multiplicitéiten gelijk zijn. Een eigenbasis bestaat daarom. Bijvoorbeeld

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (d) Ga na dat $\mathbf{x} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$. Hieruit volgt dat

$$A^{481}\mathbf{x} = A^{481}(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = 2\lambda_1^{481}\mathbf{v}_1 + \lambda_2^{481}\mathbf{v}_2 - \lambda_3^{481}\mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = (0, -3, 3)^T.$$

Hierbij zijn $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ de eigenwaarden bij de betreffende eigenvectoren.

5. (a) $A(B\mathbf{b}) = (AB)\mathbf{b} = I_m\mathbf{b} = \mathbf{b}$, dus $B\mathbf{b}$ is inderdaad een oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dit stelsel heeft dus voor elke $\mathbf{b}$ een oplossing. Dat betekent dat A na vegen geen nulrij heeft en dus in elke rij een pivot. Het aantal pivots is dus gelijk aan het aantal rijen m .
- (b) Stel $\mathbf{x}$ is een oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dan geldt ook $C(A\mathbf{x}) = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Verder is $C(A\mathbf{x}) = (CA)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Uit deze twee observaties volgt dat $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Blijkbaar is $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de enige oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en dit stelsel heeft dus geen vrije variabelen, wat betekent dat A na vegen in elke kolom een pivot heeft. Het aantal pivots is dus gelijk aan het aantal kolommen n .
- (c) We hebben zojuist gezien dat het aantal pivots van A gelijk is aan m , maar ook aan n . Blijkbaar $m = n$, wat betekent dat A vierkant is.