

Tentamen Lineaire Algebra 1, wi1602
 donderdag 12 januari 2012, 14.00-17.00 uur.

Dit werk bestaat uit twee delen: het deel dat nu voor je ligt bevat de open vragen. Tevens is er een deel meerkeuzevragen. Voor de open vragen geldt:

ELK ANTWOORD DIENT TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden. Het aantal te behalen punten bij de open vragen is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Elke goed beantwoorde meerkeuzevraag levert anderhalve punt op. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten zes op te tellen en vervolgens te delen door zes.

1. Van een matrix A is gegeven dat deze de eigenwaarden -2 en 0 heeft en dat

$$E_{-2} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{en} \quad E_0 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hierbij is E_{-2} de eigenruimte bij eigenwaarde -2 en E_0 de eigenruimte bij eigenwaarde 0 .

- (1) (a) Is A inverteerbaar?
- (2) (b) Bereken $A^{481} \mathbf{v}$ voor $\mathbf{v} = [1, -9, 5]^T$.
- (2) (c) We definiëren de matrices

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Is A gelijk aan RCR^{-1} ?

- (2) (d) Is A orthogonaal diagonaliseerbaar? Zo ja, geef een orthogonale diagonalisering. Zo nee, waarom niet?
- (1) (e) Is A symmetrisch?
- (2) (f) Is A een projectiematrix?

2. Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (3) (a) Laat zien dat $\mathbf{p}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op de kolomruimte van A is. Hoe zit dat met $\mathbf{q}$?
- (2) (b) Hoeveel kleinste kwadraten oplossingen heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Waarom?
- (2) (c) Geef *een* kleinste kwadraten oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 (OPMERKING: Als je het resultaat van (a) gebruikt kan dit met zeer weinig rekenwerk.)
- (2) (d) Bepaal een basis voor het orthogonale complement van de kolomruimte van A .

3. Gegeven is de lineaire afbeelding $T : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$T(p(x)) = p''(x) - 2xp'(x)$$

- (2 $\frac{1}{2}$) (a) Laat zien dat $B = (1, x, 1 - 2x^2, -3x + 2x^3)$ een basis voor $P_3(\mathbb{R})$ is.
- (2) (b) Bepaal de matrix A van T ten opzichte van de basis B (dus $A = \underset{B \leftarrow B}{[T]}$, of, in de notatie van het boek, $A = R_B$).
- (2) (c) Laat $E = (1, x, x^2, x^3)$ de standaardbasis voor $P_3(\mathbb{R})$ zijn. Geef een matrix P zo dat $\underset{E \leftarrow E}{[T]} = PAP^{-1}$ (in de notatie van het boek is $\underset{E \leftarrow E}{[T]}$ de matrix R_E).

4. Laat A een $m \times n$ -matrix zijn en B een $n \times p$ -matrix.

- (2) (a) Toon aan: $\text{Col}(AB) \subset \text{Col}(A)$.
[HERINNER: $\mathbf{v} \in \text{Col}(C)$ als en slechts als er een vector $\mathbf{u}$ bestaat zo dat $C\mathbf{u} = \mathbf{v}$.]
- (2) (b) Toon aan: $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A)$.
[AANWIJZING: Gebruik (a).]
- (2) (c) Laat zien dat er matrices A en B bestaan met de eigenschap dat $\text{rang}(AB) = \text{rang}(A)$, maar dat er ook matrices A en B bestaan met de eigenschap dat $\text{rang}(AB) < \text{rang}(A)$.

Uitwerkingen van dit tentamen zullen op blackboard gepubliceerd worden.

EINDE OPEN VRAGEN

Dit deel bestaat uit vijftien meerkeuzevragen. Elke goed beantwoorde vraag levert anderhalve punt op. Geef per opgave duidelijk aan welk antwoord je gekozen hebt. Bij twijfelachtige situaties wordt de opgave fout gerekend.

Zet je naam en studienummer bovenaan het blaadje.

1. Gegeven is een matrix A met drie kolommen. De matrix B maken we als volgt uit de matrix A :

- De eerste kolom van B is de eerste kolom van A ;
- De tweede kolom van B is de eerste plus de tweede plus de derde kolom van A ;
- De derde kolom van B is de derde kolom van A min de eerste kolom van A .

Er geldt

- A. $CA = B$ met $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- B. $AC = B$ met $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- C. $CA = B$ met $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;
- D. $AC = B$ met $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Als $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A^T A =$

- A. 14;
- B. niet gedefinieerd;
- C. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$;
- D. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

3. A is een $m \times n$ matrix met $m < n$ en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dan geldt: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft

- A. nul of één oplossing (afhankelijk van $\mathbf{b}$);
- B. één oplossing;
- C. nul of oneindig veel oplossingen (afhankelijk van $\mathbf{b}$);
- D. oneindig veel oplossingen.

4. Het stelsel met aangevulde matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & h & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -1 & k \end{array} \right]$$

heeft geen oplossingen als

- A.** $h = \frac{1}{2}$;
- B.** $h \neq \frac{1}{2}$ en $k = 4$;
- C.** $h \neq \frac{1}{2}$ en $k = 4$, of $h = \frac{1}{2}$ en $k \neq 4$;
- D.** $h = \frac{1}{2}$ en $k \neq 4$.

5. Gegeven een $m \times n$ -matrix A waarbij een matrix C bestaat, zo dat $AC = I$. We doen twee uitspraken:

1. A is inverteerbaar;
2. De kolommen van A zijn onafhankelijk.

Dan geldt:

- A.** uitspraak 1 is waar en uitspraak 2 is niet waar;
- B.** uitspraak 2 is waar en uitspraak 1 is niet waar;
- C.** uitspraak 1 en uitspraak 2 zijn beide waar;
- D.** uitspraak 1 en uitspraak 2 zijn beide onwaar.

6. Gegeven is dat

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

De kolommen van A noteren we met $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_7$ en die van U met $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_7$. Er geldt $\text{Col}(A) =$

- A.** $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$;
- B.** $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_7\}$;
- C.** $\text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_6\}$;
- D.** $\text{Span}\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$.

7. Gegeven is een $m \times n$ matrix A waarvan de kolommen $\mathbb{R}^m$ opspannen. We doen twee uitspraken:

1. Elke rij bevat een pivotpositie;
2. Elke kolom bevat een pivotpositie.

Dan geldt:

- A.** uitspraak 1 is waar en uitspraak 2 is onwaar;
- B.** uitspraak 1 is onwaar en uitspraak 2 is waar;
- C.** uitspraak 1 en uitspraak 2 zijn beide waar;
- D.** uitspraak 1 en uitspraak 2 zijn beide onwaar.

8. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wordt gerepresenteerd door de matrix

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

(dus $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$). We hebben hier te maken met een rotatie (in positieve richting, dus tegen de wijzers van de klok in) om de oorsprong over een hoek van

- A. $\frac{2}{3}\pi$;
- B. $\frac{5}{6}\pi$;
- C. $\frac{7}{6}\pi$;
- D. $\frac{4}{3}\pi$.

9. Het karakteristiek polynoom van de matrix $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ is gelijk aan

- A. $\frac{1}{8}(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$;
- B. $(\frac{1}{2} - \lambda)^2(1 - \lambda)$;
- C. $\frac{1}{8}(1 - \lambda)(-1 - \lambda)(2 - \lambda)$;
- D. $(\frac{1}{2} - \lambda)(-\frac{1}{2} - \lambda)(1 - \lambda)$.

10. Stel $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ zijn vectoren in $\mathbb{R}^n$ met $\|\mathbf{p}\| = 3$ en $\|\mathbf{q}\| = 5$. Voor welke van de volgende waarden van k zijn de vectoren $\mathbf{p} + k\mathbf{q}$ en $\mathbf{p} - k\mathbf{q}$ orthogonaal?

- A. $k = 3/5$;
- B. $k = 5/3$;
- C. $k = \sqrt{3/5}$;
- D. $k = \sqrt{5/3}$.

11. Laat W een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ zijn en $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. We doen de volgende twee uitspraken:

1. Als er een $\mathbf{w} \in W$ is die loodrecht op $\mathbf{v}$ staat, dan $\mathbf{v} \in W^\perp$;
2. Als $W = \mathbb{R}^n$ dan $W^\perp = \emptyset$ (de lege verzameling).

Er geldt:

- A. zowel uitspraak 1 als uitspraak 2 is waar;
- B. uitspraak 1 is waar en uitspraak 2 is onwaar;
- C. uitspraak 2 is waar en uitspraak 1 is onwaar;
- D. zowel uitspraak 1 als uitspraak 2 is onwaar.

12. Gegeven zijn de matrices

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Er geldt:

- A. Zowel A als B is een orthogonale matrix;
- B. A is een orthogonale matrix en B niet;
- C. B is een orthogonale matrix en A niet;
- D. A noch B is een orthogonale matrix.

13. De overgangsmatrix van de basis $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ naar de standaardbasis $E =$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ wordt gegeven door

A. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix};$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1};$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$

14. De dimensie van de deelruimte van $M_{3,3}(\mathbb{R})$ die bestaat uit alle symmetrische matrices is

A. 3;

B. 4;

C. 6;

D. 9.

15. De afbeelding $T : M_{7,7} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$T(A) = \det A$$

is

A. lineair;

B. niet lineair, maar wel geldt $T(A+B) = T(A) + T(B)$ voor alle 7×7 matrices A en B ;

C. niet lineair, maar wel geldt $T(cA) = cT(A)$ voor alle 7×7 matrices A en $c \in \mathbb{R}$;

D. niet lineair en voorgaande alternatieven gelden niet.

Uitwerking Tentamen Lineaire Algebra 1, wi1602, donderdag 12 januari 2012.

1. (a) Nee, want 0 is een eigenwaarde. Dat betekent dat $\det(A - 0I) = 0$ en dus dat $\det A = 0$. Hieruit volgt dat A niet inverteerbaar is.

- (b) Oplossen van

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

leert dat $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ en $x_3 = -1$. Dan volgt dat

$$\begin{aligned} A^{481} \mathbf{v} &= x_1 (-2)^{481} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 (-2)^{481} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \cdot 0^{481} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 3(-2)^{481} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot (-2)^{481} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - 1 \cdot 0^{481} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (-2)^{481} \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (c) Als dat waar zou zijn, hebben we een diagonalisering van A en zou de derde kolom van R een eigenvector van A bij eigenwaarde -2 moeten zijn en dus een lineaire combinatie van de vectoren die E_{-2} opspannen. Het stelsel met aangevulde matrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

zou dan oplossingen moeten hebben, en dat is niet zo. Conclusie: RCR^{-1} is niet gelijk aan A .

- (d) We creëren eerst een orthogonale basis voor E_{-2} (m.b.v. Gram-Schmidt). Schrijf daartoe

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Maak vervolgens

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

en

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_2 - \frac{-6}{6} \mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

We nemen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dit zijn twee orthogonale (en dus onafhankelijke) eigenvectoren bij eigenwaarde -2 . Vervolgens voegen we daar de eigenvector

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(bij eigenwaarde 0) aan toe. Omdat $\mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_2$ vormen deze drie vectoren na normaliseren een orthonormale eigenbasis voor $\mathbb{R}^3$. A is dus orthogonaal diagonaliseerbaar in de vorm $A = QDQ^{-1} = QDQ^T$ met de orthogonale matrix

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

en diagonaalmatrix

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (e) Ja, want de symmetrische matrices zijn precies de orthogonaal diagonaliseerbare matrices.
- (f) Als A een projectiematrix zou zijn, dan moet gelden dat $A^2 = A$. Nu geldt dat de eigenwaarden van A^2 gelijk zijn aan de kwadraten van de eigenwaarden van A en dus gelijk zijn aan 0 en 4. Omdat A andere eigenwaarden heeft is A^2 niet gelijk aan A .
Conclusie: A is geen projectiematrix.

2. (a) Hier hoeft je de orthogonale projectie niet meer te berekenen, maar slechts te controleren dat het werkelijk de orthogonale projectie is en dat gaat met de definitie van orthogonale projectie veel sneller dan het (opnieuw) berekenen ervan via een orthogonale basis. Je moet dus nagaan dat $\mathbf{p}$ tot $\text{Col } A$ behoort, en dat is zo want $\mathbf{p}$ is de eerste minus de tweede kolom van A en dus een lineaire combinatie van de kolommen van A , en dat $\mathbf{b} - \mathbf{p} \perp \text{Col } A$, en ook dat is zo omdat $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ loodrecht op alle kolommen van A staat (bereken de vier inwendig producten van $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ maar met de vier kolommen).

Omdat de projectie van $\mathbf{b}$ op $\text{Col } A$ uniek is en gelijk aan $\mathbf{p}$, kan $\mathbf{q}$ dit niet zijn.

- (b) De kolommen van A zijn afhankelijk (de derde is eerste minus twee keer de tweede), wat tot gevolg heeft dat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oneindig veel kleinste kwadraten oplossingen heeft.
- (c) Makkelijke manier: voor een kleinste kwadraten oplossing $\hat{\mathbf{x}}$ van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geldt dat $A\hat{\mathbf{x}}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op de kolomruimte van A is, dus $A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$, ofwel

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Met inspectie is in te zien dat $\hat{\mathbf{x}} = [1, -1, 0, 0]^T$ voldoet.

Een tragere manier: bepaal een oplossing van $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.

- (d) De vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ behoort tot het orthogonale complement van $\text{Col } A$ (ofwel $(\text{Col } A)^\perp$) als deze loodrecht op alle vectoren uit de kolomruimte van A staat. Dat is het geval als $\mathbf{x}$ loodrecht staat op de vier kolommen van A . De inwendig producten van $\mathbf{x}$ met de vier kolommen van A moeten dus nul zijn. Dat leidt tot de vier vergelijkingen $4x_1 - x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_4 = 0$, $2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$ en $5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$. Dit is een stelsel lineaire vergelijkingen. Dit stelsel oplossen leidt tot een basis.

Je kunt rekenwerk besparen door niet met de vier kolommen van A te werken, maar met een basis voor $\text{Col } A$. Deze is met inspectie te zien: de derde en vierde kolom zijn combinaties van de eerste twee kolommen, waaruit volgt dat de eerste twee kolommen van A een basis vormen voor $\text{Col } A$. De vector $\mathbf{x}$ behoort dus tot $(\text{Col } A)^\perp$ als $\mathbf{x}$ loodrecht staat op de eerste

twee kolommen. Je krijgt dan een stelsel met slechts twee vergelijkingen: $4x_1 - x_3 + x_4 = 0$ en $x_1 + x_2 + x_4 = 0$. Oplossen leert dat bijvoorbeeld

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

een basis is voor $(\text{Col } A)^\perp$.

Een andere methode: $\text{Col}(A)^\perp = \text{Nul}(A^T)$. Oplossen van $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (dat is precies het stelsel uit de eerste gepresenteerde methode) levert vervolgens de zojuist gevonden basis.

3. (a) Bekend is dat de dimensie van $P_3(\mathbb{R})$ gelijk is aan 4. Het aantal vectoren in B is dus okay. Verder hebben alle vier de polynomen uit B een graad van hooguit 3, zodat ze alle vier tot $P_3(\mathbb{R})$ behoren. Rest aan te tonen dat de vier polynomen onafhankelijk zijn. Beschouw daartoe de vectorvergelijking

$$c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3(1 - 2x^2) + c_4(-3x + 2x^3) = 0$$

waarbij 0 staat voor het nulpolynoom $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$. Omwerken levert

$$(c_1 + c_3) + (c_2 - 3c_4)x - 2c_3x^2 + 2c_4x^3 = 0$$

zodat moet gelden dat $c_1 + c_3 = 0$, $c_2 - 3c_4 = 0$, $c_3 = 0$ en $c_4 = 0$. Dat kan alleen als ze alle vier nul zijn. De polynomen zijn dus onafhankelijk.

Conclusie: B is een basis voor $P_3(\mathbb{R})$.

De onafhankelijkheid had ook als volgt aangetoond kunnen worden: neem de standaardbasis $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ voor $P_3(\mathbb{R})$. Dan geldt: B onafhankelijk in $P_3(\mathbb{R})$ als en slechts als de kolommen van de ten opzichte van E gecoördinatiseerde vier polynomen uit B onafhankelijk zijn in $\mathbb{R}^4$. Toon dus onafhankelijkheid aan van de vier kolommen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (b) Er geldt dat $T(1) = 0$, $T(x) = -2x$, $T(1 - 2x^2) = -4 + 8x^2$ en $T(-3x + 2x^3) = 18x - 12x^3$. De kolommen van de gevraagde matrix zijn de coördinatiseringen van deze vier polynomen ten opzicht van de basis B . Daarom moet je de vier polynomen schrijven als lineaire combinatie van de vier polynomen uit B_3 en dat is in dit geval eenvoudig:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2x + 0(1 - 2x^2) + 0(-3x + 2x^3) \\ -2x &= 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2x + 0(1 - 2x^2) + 0(-3x + 2x^3) \\ -4 + 8x^2 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2x - 4(1 - 2x^2) + 0(-3x + 2x^3) \\ 18x - 12x^3 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2x + 0(1 - 2x^2) - 6(-3x + 2x^3) \end{aligned}$$

Er volgt

$$[T(1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [T(1 - 2x^2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [T(-3x + 2x^3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

en dus

$$A = \begin{matrix} [T] \\ B \leftarrow B \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

- (c) Er geldt $\begin{matrix} [T] \\ E \leftarrow E \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ E \leftarrow B \end{matrix} \begin{matrix} [T] \\ B \leftarrow B \end{matrix} \begin{matrix} C \\ B \leftarrow E \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ E \leftarrow B \end{matrix} \begin{matrix} [T] \\ B \leftarrow B \end{matrix} \begin{pmatrix} C \\ E \leftarrow B \end{pmatrix}^{-1}$. Neem dus $P = \begin{matrix} C \\ E \leftarrow B \end{matrix}$. De kolommen hiervan zijn de coördinatiseringen van de vectoren uit B ten opzichte van de standaardbasis E . Dus

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Pak $\mathbf{v}$ uit $\text{Col}(AB)$. Dan bestaat er een vector $\mathbf{u}$ zo dat $(AB)\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Neem nu de vector $\mathbf{u}' = B\mathbf{u}$. Deze bestaat en er geldt dat $A\mathbf{u}' = A(B\mathbf{u}) = (AB)\mathbf{u} = \mathbf{v}$, wat betekent dat $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$.
- (b) Er geldt dat $\text{rang}(AB) = \dim \text{Col}(AB)$ en $\text{rang}(A) = \dim \text{Col}(A)$. Omdat $\text{Col}(AB) \subset \text{Col}(A)$ is $\dim \text{Col}(AB) \leq \dim \text{Col}(A)$, waaruit het gestelde direct volgt.
- (c) Neem bijvoorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dan $AB = B$ en dus $\text{rang}(AB) = \text{rang}(B) = 2 = \text{rang}(A)$. Echter, voor bijvoorbeeld de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

geldt weer $AB = B$, maar nu $\text{rang}(AB) = \text{rang}(B) = 1 < 2 = \text{rang}(A)$.

Er zijn vele andere voorbeelden te bedenken!

MK.

Opgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Versie 1:	D	C	C	D	D	B	A	C	D	A	D	D	A	C	D
Versie 2:	D	C	C	B	D	A	A	C	D	A	B	D	A	C	D
Versie 3:	B	C	D	D	B	B	C	C	D	A	D	B	A	C	D
Versie 4:	B	C	D	B	B	A	C	C	D	A	B	B	A	C	D