Uitwerking Toets lineaire algebra 1, wi1602, vrijdag 11 november 2011.

1. (a) Het gaat voor alle α om vier kolommen (vectoren) in $\mathbb{R}^3$, dus om meer dan drie vectoren in $\mathbb{R}^3$ dus. Die zijn gegarandeert afhankelijk. Het antwoord is dus: voor alle α.

(b) Ga na:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -6 \\ -2 & -2 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 2 & -2 & 6+\alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Voor $\alpha = 0$ zijn er twee pivots en is de dimensie van de kolomruimte twee. De kolomruimte is dan dus niet heel $\mathbb{R}^3$. Voor $\alpha \neq 0$ zijn er drie pivots en is de dimensie van de kolomruimte drie. De kolomruimte moet dan wel heel $\mathbb{R}^3$ zijn, want een drie-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is $\mathbb{R}^3$ zelf.
Het antwoord is dus: voor $\alpha \neq 0$.
De kolomruimte is het lineair omhulsel van de kolommen van A. "De kolommen spannen heel $\mathbb{R}^3$ op, betekent dus hetzelfde als "de kolomruimte is heel $\mathbb{R}^3$".

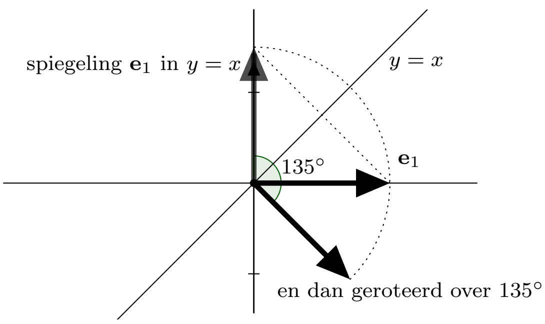
(c) Ga na:

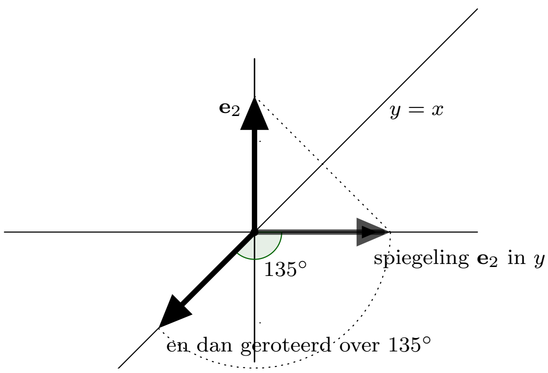
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -6 & 7 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dus x_3 en x_4 zijn vrij, $x_1 = 3 - x_3 + 3x_4$ en $x_2 = -2 + x_3 - 3x_4$, met andere woorden

$$\mathbf{x} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.





Uit de plaatjes blijkt:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^\circ \\ -\sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 45^\circ \\ -\sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Volgens de stelling van sheet 7 van les 6.1/6.2 is de standaardmatrix dan $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Je kun ook als volgt redeneren:

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = T\left(x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x_1 T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= x_1\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

en die 2×2 matrix is de standaardmatrix.

3. Uit de geveegde matrix blijkt dat de dimensie van de nulruimte twee is (er zijn namelijk twee kolommen zonder pivot) en dat is gelijk aan het aantal vectoren in $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.
Verder is duidelijk dat $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$ onafhankelijk zijn (het zijn immers geen scalair veelvouden van elkaar).
Als de twee vectoren dan ook nog tot de nulruimte van A behoren, vormen ze een basis voor $\operatorname{Nul} A$. En ze behoren ertoe! Er geldt namelijk dat $A\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ én $A\mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$. Conclusie: $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ is een basis voor $\operatorname{Nul} A$.

4. (a) Merk op dat $[2,2,0]^T = [1,2,1^T + [1,0,-1]^T$. Omdat de laatste twee tot de eigenruimte van A bij eigenwaarde 2 behoren, behoort $[2,2,0]^T$ ook tot die eigenruimte. Het is geen nulvector en dus is het een eigenvector bij eigenwaarde 2.
$[0,0,0]^T$ is een nulvector en dus geen eigenvector.
$[2,1,0]^T$ behoort niet tot de eigenruimte bij eigenwaarde 2 (het is geen lineaire combinatie van $[1,2,1]^T$ en $[1,0,-1]^T$) en het behoort ook niet tot de eigenruimte bij eigenwaarde 1 (het is geen scalair veelvoud van $[1,1,1]^T$). Het is dus geen eigenvector bij eigenwaarde -1 en ook geen eigenvector bij eigenwaarde 2. Is er nog een andere eigenwaarde? Nee! A is een 3×3 matrix en heeft dus drie eigenwaarden. De eigenwaarde 2 komt tenminste twee keer voor (want de dimensie van de eigenruimte is twee) en de eigenwaarde -1 komt minstens één keer voor. Conclusie: $[2,1,0]^T$ is geen eigenvector.
Een andere methode: $[2,1,0]^T = [1,1,1]^T + [1,0,-1]^T$. Omdat de laatste twee vectoren eigenvectoren zijn bij de eigenwaarden -1 en 2 volgt

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

en dat is geen scalair veelvoud van $[2,1,0]^T$. Dit is dus geen eigenvector!

(b) Er geldt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dus

$$A^{17}\mathbf{v} = A^{17}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = A^{17}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + A^{17}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - A^{17}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= (-1)^{17}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2^{17}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2^{17}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2^{17}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2^{18} \\ -1+2^{18} \end{bmatrix}.$$

MK.

Opgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versie 1:	C	D	D	C	B	D	D	A	C
Versie 2:	B	C	C	D	C	B	D	A	C
Versie 3:	C	C	A	B	B	B	B	A	D
Versie 4:	D	D	A	B	C	B	B	A	B