

Toets lineaire algebra 1, wi1602
 dinsdag 2 november 2010, 14.00-15.30 uur.

ELK ANTWOORD DIEN TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als rekenmachines, mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden. Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het Toetscijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie.

1. Gegeven is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \alpha & 4 & \beta \\ 3 & 2 & 2\alpha & 2 \\ -6 & -4 & -8 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -14 \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

- (1) (a) Leg zonder te vegen uit dat er geen α en β bestaan waarvoor dit stelsel één oplossing heeft.
 (3) (b) Onderzoek voor welke α en β het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen oplossingen heeft.
 (2) (c) Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op voor $\alpha = 2$ en $\beta = 4$.
- (2) 2. (a) Is de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $T([x_1, x_2, x_3]) = [\pi x_1 + 3x_2 - x_3, x_1 x_2 + x_3]$ lineair?
 (2) (b) Gegeven zijn de punten $A(1, 1, 2)$, $B(2, -2, 5)$ en $C(3, 0, 4)$. Wat is de oppervlakte van de driehoek $\triangle ABC$?

3. Gegeven is de matrix A die we alvast geveegd hebben tot echelonvorm F :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F.$$

De getransponeerden van de rijen van A noemen we achtereenvolgens $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$ en $\mathbf{r}_5$.

- (1½) (a) Bepaal een basis voor de rijruimte van A .
 (2) (b) Is $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\}$ een basis voor Row A ?
 (2) (c) Geldt Row $A = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_5\}$?
 (2) (d) Bestaat er een 4×5 matrix B met de eigenschap dat Row $B = \text{Row } A$ en $\dim \text{Nul } B = 3$? Leg uit!

4. Gegeven zijn de volgende matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1½) (a) Bereken AB .
 (2) (b) Welke kolommen van B zijn eigenvectoren van A ? Geef ook de bijbehorende eigenwaarden.
 (2) (c) Wat is de derde kolom van $A^{15}B$?

- (2) 5. (a) Een scheefsymmetrische matrix is een matrix waarvoor geldt dat $A^T = -A$. Laat zien dat voor een inverteerbare scheefsymmetrische $n \times n$ matrix geldt dat n even is.
[AANWIJZING: Gebruik determinanten.]
- (2) (b) Gegeven is een $n \times n$ matrix A met rang r . Laat zien dat voor elk k -tal vectoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ met $k > r$ geldt dat afhankelijk is.

Uitwerkingen van deze toets zullen op blackboard gepubliceerd worden.

EINDE

Uitwerking Toets lineaire algebra 1, wi1602, dinsdag 2 november 2010.

1. (a) De coëfficiëntenmatrix heeft drie rijen en vier kolommen. Er zijn dus hooguit drie pivots, waardoor er altijd een vrije variabele is. Een consistent stelsel heeft daardoor oneindig veel oplossingen. Een inconsistent stelsel heeft natuurlijk geen oplossingen. Conclusie: één oplossing komt bij dit stelsel niet voor.
- (b) Ga na dat

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & \alpha & 4 & \beta & 4 \\ 3 & 2 & 2\alpha & 2 & 8 \\ -6 & -4 & -8 & -5 & -14 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & \alpha & 4 & \beta & 4 \\ 0 & \boxed{2-\alpha} & 2\alpha-4 & 2-\beta & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{4\alpha-8} & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Merk op dat de “omhokte” kentallen pivots zijn voor $\alpha \neq 2$. Het stelsel heeft in dat geval oneindig veel oplossingen (ongeacht β).

Invullen van $\alpha = 2$ levert de aangevulde matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & \beta & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\beta & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

Dit is nog geen echelonvorm. De onderste twee rijen wisselen en vervolgens $(2-\beta)$ maal de tweede rij bij de derde rij optellen levert de echelonvorm

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & \beta & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8-2\beta \end{array} \right].$$

Vanwege de onderste rij heeft dit stelsel géén oplossingen als $\beta \neq 4$, anders oneindig veel.
Conclusie: geen oplossingen als $\alpha = 2$ en $\beta \neq 4$.

- (c) Substitutie van $\alpha = 2$ en $\beta = 4$ in het bij (a) geveegde stelsel en doorvegen tot gereduceerde echelonvorm levert

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & 4/3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

zodat x_2 en x_3 vrij zijn, $x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3$ en $x_4 = -2$. Dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Intuïtief is het duidelijk dat de afbeelding niet lineair is door de term x_1x_2 . Nu nog netjes bewijzen. Neem daartoe bijvoorbeeld de vectoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dan

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \pi + 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en

$$T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi + 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Blijkbaar is $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \neq T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, wat aantoont dat T niet lineair is.

- (b) Deze driehoek is de helft van het parallellogram bepaald door de vectoren $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = [1, -3, 3]^T$ en $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = [2, -1, 2]^T$. De oppervlakte van dit parallellogram is

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}.$$

De oppervlakte van $\triangle ABC$ is dus $\frac{1}{2}\sqrt{50}$.

3. (a) Hiervoor kun je de (getransponeerden van de) rijen van F nemen die een pivot hebben. Uit de gegeven F blijkt dat dit de eerste tweede en derde rij zijn. Dus een basis is bijvoorbeeld

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (b) Uit (a) blijkt dat de dimensie van de rijruimte drie is en dat is gelijk aan het aantal vectoren in $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\}$.

Verder is duidelijk dat $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3$ en $\mathbf{r}_4$ tot de rijruimte van A behoren (het zijn immers rijen van A).

Als de drie vectoren dan ook nog onafhankelijk zijn, vormen ze een basis voor Row A . En ze zijn onafhankelijk: het stelsel $x_1\mathbf{r}_1 + x_3\mathbf{r}_3 + x_4\mathbf{r}_4 = \mathbf{0}$ heeft namelijk maar één oplossing, wat blijkt uit een bij het stelsel behorende echelonvorm:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 15 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Conclusie: $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\}$ is een basis voor Row A .

- (c) Merk op dat $\mathbf{r}_5 = -\frac{3}{2}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_3$. Daaruit volgt dat $\text{Span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_5\} = \text{Span}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3\}$. De dimensie is dus (hooguit) 2. Omdat de dimensie van Row A drie is, zijn ze dus niet gelijk.
- (d) Als de gevraagde B zou bestaan, dan $\text{Row } B = \text{Row } A$, en dus $\dim \text{Row } B = 3$. Ook $\dim \text{Nul } B = 3$. Dus voor die B geldt

$$\dim \text{Row } B + \dim \text{Nul } B = 6.$$

In het algemeen geldt echter $\dim \text{Row } B + \dim \text{Nul } B = \text{aantal kolommen van } B$ en dat is 5. Zo'n B bestaat blijkbaar niet.

4. (a) $AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

- (b) Noem de kolommen van B achtereenvolgens $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ en $\mathbf{b}_3$. De tweede kolom ($\mathbf{b}_2$ dus) is een eigenvector bij eigenwaarde 0 (want uit (a) blijkt dat $A\mathbf{b}_2 = 0\mathbf{b}_2$) en de derde kolom ($\mathbf{b}_3$) is een eigenvector bij eigenwaarde 3 (want uit (a) blijkt dat $A\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{b}_3$).
- (c) De derde kolom van $A^{15}B$ is $A^{15}\mathbf{b}_3$. Omdat $\mathbf{b}_3$ een eigenvector is bij eigenwaarde 3, is dit gelijk aan

$$3^{15}\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3^{15} \\ -3^{15} \\ 3^{15} \end{bmatrix}.$$

5. (a) Er geldt $\det A = \det A^T = \det(-A) = \det(-1A) = (-1)^n \det A$. Omdat A inverteerbaar is, is $\det A \neq 0$ en dus is $(-1)^n = 1$. Dat gebeurt alleen als n even is.
- (b) Merk op dat $A\mathbf{x}_1$ t/m $A\mathbf{x}_k$ allemaal tot de kolomruimte van A behoren. We hebben dus k vectoren in $\text{Col } A$. Als ze onafhankelijk zijn, dan volgt dat ze uitgebreid kunnen worden tot een basis voor $\text{Col } A$ en dus dat de dimensie van $\text{Col } A$ tenminste k is. Verder weten we dat de dimensie van $\text{Col } A$ gelijk is aan de rang van A en dat is r . Tegenspraak, want $r < k$. Conclusie: $\{A\mathbf{x}_1, \dots, A\mathbf{x}_k\}$ is niet onafhankelijk (dus afhankelijk).