

Voorbeeldtentamen lineaire algebra 1, wil602
 januari 2010, 9.00-12.00 uur.

ELK ANTWOORD DIEN TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden. Alleen een rekenmachine die ook op het VWO gebruikt mag worden is toegestaan. Hierin mag geen informatie opgeslagen zijn!!

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het Voorbeeldtentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten zes op te tellen en vervolgens te delen door zes.

1. Gegeven zijn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (3) (a) Bepaal de dimensie van $\text{Col } A$, $\text{Row } A$, $\text{Nul } A$ en $\text{Nul } A^T$ door hooguit één matrix vegen.
- (2) (b) Is $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ een basis voor de nulruimte van A ?
- (2) (c) Is $\text{Nul}(A) = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$?
- (2) 2. (a) Bepaal de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $P(-1, 3, 1)$, $Q(0, 5, 2)$ en $R(4, 3, -1)$.
- (2) (b) Gegeven zijn de 3×3 matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 2a + 3d & 2b + 3e & 2c + 3f \end{bmatrix}.$$

Bepaal $\det(B)$ als gegeven is dat $\det(A) = -4$.

- (2) (c) Gegeven zijn matrices C en D zo dat $CDC = I_n$. Laat zien dat D vierkant is. Is D inverteerbaar?

3. Van de 3×3 matrix A is bekend dat

$$\text{Nul}(A - I) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{en} \quad \det(A) = 0.$$

- (2) (a) Leg uit dat A twee verschillende eigenwaarden heeft, namelijk 0 en 1 en geef ook de algebraïsche multipliciteiten.
- (2) (b) Leg uit dat A diagonaliseerbaar is.
- Er wordt ook nog gegeven dat de eigenvectoren bij eigenwaarde 0 loodrecht staan op die bij eigenwaarde 1.
- (2) (c) Geef een diagonalisering van A (Merk op dat A hiermee berekend kan worden, dat hoeft je overigens niet te doen!).
- (2) (d) Bepaal $A^k \mathbf{b}$ als lineaire combinatie van eigenvectoren van A als $\mathbf{b} = (0, 0, 6)^T$ (hierbij is $k \geq 1$ een geheel getal).

- (2) 4. (a) Vul de volgende definitie aan: de *orthogonale projectie* van een vector $\mathbf{b}$ op de kolomruimte van een matrix A is de vector $\mathbf{p}$ zo dat ...

Gegeven zijn de volgende matrix en vectoren:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (3) (b) Laat zien dat $\mathbf{p}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{b}$ op de kolomruimte van A is. Geldt dat ook voor $\mathbf{q}$?
- (2) (c) Bepaal een basis voor het orthogonale complement van de kolomruimte van A .
- (2) (d) Hoeveel kleinste kwadraten oplossingen heeft het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Waarom?
- (2) (e) Geef *een* kleinste kwadraten oplossing van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
(AANWIJZING: Als je het resultaat van (a) gebruikt kan dit met zeer weinig rekenwerk. Eén kleinste kwadraten oplossing volstaat.)

5. Gegeven is dat A een vierkante niet-nulmatrix is met de eigenschap dat $A^2 = A$.

- (2) (a) Toon aan: De enig mogelijke eigenwaarden voor A zijn 0 en 1.
- (2) (b) Toon aan: De niet-nulvectoren uit $\text{Col}(A)$ zijn precies de eigenvectoren bij eigenwaarde 1.
(AANWIJZING: $\mathbf{y}$ zit in $\text{Col}(A)$ als en slechts als er een vector $\mathbf{x}$ bestaat zo dat $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.)

- (2) 6. (a) Dun het stelsel $S = \{1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3 - 1, 1 - 2x + x^2, 1 + x + x^2 - 3x^3\}$ uit tot een basis voor $\text{Span}(S)$. We werken in $P_3(\mathbb{R})$.
- (1) (b) Is $\text{Span}(S)$ gelijk aan $P_3(\mathbb{R})$? Vergeet niet je antwoord uit te leggen!
- (3) (c) Laat zien dat $B = \{1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x\}$ een basis voor $P_3(\mathbb{R})$ is.
- (2) (d) We geven dat $B' = \{1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3, x + x^2\}$ ook een basis voor $P_3(\mathbb{R})$ is. Bepaal de overgangsmatrix ${}_{B \leftarrow B'} C$.
- (2) (e) Gegeven is de lineaire afbeelding $L : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ waarvoor geldt

$${}_{B \leftarrow B} [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal ${}_{B \leftarrow B'} [L]$.

- (2) 7. (a) Geldt $\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots \right\} = \mathbb{R}^\infty$? Vergeet je uitleg niet!
- (2) (b) Is de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$ lineair?
- (2) (c) Gegeven is een inverteerbare 7×7 matrix B . Is de lineaire afbeelding $\mathcal{L} : M_{7,7}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{7,7}(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $\mathcal{L}(A) = A^T B$ dan inverteerbaar?
- (2) (d) Is de verzameling $\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ heeft minstens één nulpunt}\}$ een deelruimte van $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Uitwerkingen van dit tentamen zullen op blackboard gepubliceerd worden.

Uitwerking Voorbeeldtentamen lineaire algebra 1, wi1602, januari 2010.

1. (a) Ga na dat

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er zijn dus twee pivots en drie kolommen zonder pivot, wat tot gevolg heeft dat $\dim \text{Col } A = \dim \text{Row } A = 2$ en $\dim \text{Nul}(A) = 3$. Merk op dat $\dim \text{Col } A^T + \dim \text{Nul } A^T$ gelijk is aan het aantal kolommen van A^T en dat is drie. Omdat $\text{Col } A^T = \text{Row } A$, geldt $\dim \text{Col } A^T = 2$ en dus $\dim \text{Nul } A^T = 1$.

- (b) Neen, $\mathbf{v}_3$ behoort niet tot $\text{Nul}(A)$ (immers: $A\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$).

- (c) Er geldt dat $\mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$, zodat $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$. De vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_4$ zijn onafhankelijk, behoren tot $\text{Nul}(A)$ (want $A\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ voor $i = 1, 2$ en 4) en het aantal is gelijk aan de dimensie van $\text{Nul}(A)$. Ze vormen dus een basis voor $\text{Nul}(A)$, wat tot gevolg heeft dat $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\} = \text{Nul}(A)$. Het antwoord op de vraag is dus “ja”.

2. (a) Deze driehoek is de helft van het parallellogram dat wordt bepaald door de vectoren $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 1)^T$ en $\overrightarrow{PR} = (5, 0, -2)^T$. De oppervlakte van de driehoek is daarom gelijk aan $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\|$. Ga na dat het uitwendig product $(-4, 7, -10)^T$ is en de lengte $\sqrt{165}$. De oppervlakte van de driehoek is dus $\frac{1}{2}\sqrt{165}$.

- (b) Toepassen van het veegproces leidt tot

$$\det(B) = \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix} =$$

$$3 \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \det(A) = -12.$$

- (c) Als C een $p \times q$ matrix is, dan is CDC alleen gedefinieerd als D een $q \times p$ matrix is en is het een $p \times q$ matrix. Anderzijds volgt uit het gegeven dat het een $n \times n$ matrix is. Blijkbaar is $p = q = n$, zodat C en D vierkant zijn.

Omdat de matrices vierkant zijn, kunnen determinanten genomen worden en er volgt

$$1 = \det(I_n) = \det(CDC) = \det(C) \det(D) \det(C) = \det(D) \det(C)^2.$$

De determinant van D is dus ongelijk aan nul, zodat D inverteerbaar is.

3. (a) Omdat $\text{Nul}(A - I)$ vectoren $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ bevat is 1 een eigenwaarde. Voor zo'n $\mathbf{v}$ geldt namelijk dat $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, dus $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Omdat de meetkundige multipliciteit (dat is de dimensie van $\text{Nul}(A - I)$) twee is, is de algebraïsche multipliciteit tenminste twee. Verder geldt dat $\det(A - 0I) = \det(A) = 0$, dus 0 is een eigenwaarde van A met algebraïsche multipliciteit tenminste één. A is een 3×3 matrix zodat er het totaal van de algebraïsche multipliciteiten drie is. Blijkbaar komt de eigenwaarde 1 twee keer voor en de eigenwaarde 0 één keer.
- (b) De meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde 1 is twee en die van eigenwaarde 0 is één omdat die altijd tussen één en de algebraïsche multipliciteit in ligt. Blijkbaar geldt voor elke eigenwaarde dat de meetkundige en algebraïsche multipliciteiten gelijk zijn. De matrix is dus diagonaliseerbaar.
- (c) Een eigenvector $(x_1, x_2, x_3)^T$ bij eigenwaarde 0 staat blijkbaar loodrecht op $(1, -1, 1)^T$ en $(1, 2, 4)^T$. Er moet dus gelden dat $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ en $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$. Oplossen leert

dat bijvoorbeeld $(-2, -1, 1)^T$ een eigenvector bij eigenwaarde 0 is. Dus $A = PDP^{-1}$ met

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Ga na dat

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dit is een lineaire combinatie van eigenvectoren. Daaruit volgt dat

$$A^k \mathbf{b} = 1^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 0^k \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

voor alle k .

4. (a) $\mathbf{p}$ tot de kolomruimte van A behoort en $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ loodrecht op de kolomruimte van A staat.
 (b) $\mathbf{p}$ is gelijk aan de eerste minus de tweede kolom van A dus $\mathbf{p} \in \text{Col}(A)$. Verder is $\mathbf{b} - \mathbf{p} = (1, 1, 2, -2)$ en deze staat loodrecht op alle kolommen van A (het inwendig product is telkens nul), zodat $\mathbf{b} - \mathbf{p} \in \text{Col}(A)^\perp$. Conclusie: $\mathbf{p}$ is inderdaad de bedoelde orthogonale projectie. $\mathbf{q}$ is niet de orthogonale projectie van $\mathbf{p}$ op $\text{Col}(A)$ omdat deze uniek is en $\mathbf{p}$ het al is. Een andere mogelijkheid is laten zien dat $\mathbf{b} - \mathbf{q}$ niet loodrecht op alle kolommen van A staat.
 (c) Je mag gebruiken dat $\text{Col}(A)^\perp = \text{Nul}(A^T)$. Los dus op $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Als je dat niet weet gaat het als volgt: stel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ is een vector uit $\text{Col}(A)^\perp$. Dan moet $\mathbf{x}$ loodrecht staan op de vier kolommen van A en moeten de inwendig producten van $\mathbf{x}$ en deze kolommen dus nul zijn. Dit leidt tot de vier vergelijkingen

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Dit is precies het stelsel $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Veeg dus

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{dus} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_3 = \text{vrij} \\ x_4 = \text{vrij} \end{cases}$$

Een basis is dus bijvoorbeeld $\{(1, -1, 4, 0), (-1, -3, 0, 4)\}$.

- (d) De kolommen van A zijn afhankelijk (bijvoorbeeld: de derde kolom is gelijk aan de eerste minus twee maal de tweede) en dus zijn er oneindig veel kleinste kwadraten oplossingen.
 (e) De snelste manier: Een kleinste kwadraten oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is een oplossing van $A\mathbf{x} = \text{proj}_{\text{Col}(A)} \mathbf{b} = \mathbf{p}$, en bij (a) hebben we gezien dat $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 0)$ voldoet.
5. (a) Stel dat λ een eigenwaarde is van A en dat $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ een bijbehorende eigenwaarde is. Dan geldt $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ en $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Omdat $A^2 = A$ moet ook $\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Gelukkig is $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, waardoor we mogen concluderen dat $\lambda = \lambda^2$, zodat $\lambda = 0$ of $\lambda = 1$.
 (b) Neem een vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ uit $\text{Col}(A)$. Dan is er een vector $\mathbf{x}$ zo dat $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Maar dan geldt enerzijds dat $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A\mathbf{y}$ en anderzijds dat $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Conclusie: $A\mathbf{y} = \mathbf{y}$ en

dus is $\mathbf{y}$ een eigenvector bij eigenwaarde 1.

Nu andersom: Neem een eigenvector $\mathbf{y}$ bij eigenwaarde 1. Dan $A\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Omdat $A\mathbf{y}$ tot de kolomruimte van A behoort en $A\mathbf{y} = \mathbf{y}$, behoort $\mathbf{y}$ ook tot $\text{Col } A$. Conclusie: eigenvectoren bij eigenwaarde 1 behoren tot $\text{Col}(A)$.

6. (a) Merk op dat $x^3 - 1 = -(1-x) - (x-x^2) - (x^2-x^3)$ dus (bijvoorbeeld) $x^3 - 1$ kan verwijderd worden. Verder is $1 - 2x + x^2 = (1-x) - (x-x^2)$ dus ook deze kan verwijderd worden. Tenslotte geldt $1 + x + x^2 - 3x^3 = (1-x) + 2(x-x^2) + 3(x^2-x^3)$. We houden drie polynomen over. Deze drie zijn onafhankelijk: Stel $c_1(1-x) + c_2(x-x^2) + c_3(x^2-x^3) = 0$ (het nulpolynoom!). Herschrijven geeft $c_1 + (-c_1 + c_2)x + (-c_2 + c_3)x^2 - c_3x^3 = 0$. Dus $c_1 = 0$, $-c_1 + c_2 = 0$, $-c_2 + c_3 = 0$ en $c_3 = 0$. Hieruit volgt snel dat alle drie de c_i nul moeten zijn en dus zijn de drie overgebleven polynomen onafhankelijk en vormen ze een basis voor $\text{Span}(S)$.

Opmerking: deze opgave kan ook gemaakt worden via coördinatisering van de polynomen t.o.v. de standaardbasis voor $P_3(\mathbb{R})$.

- (b) De dimensie van $\text{Span}(S)$ is 3 en de dimensie van $P_3(\mathbb{R})$ is vier. Ze zijn dus niet gelijk.
- (c) Het aantal is gelijk aan vier, dus gelijk aan de dimensie van $P_3(\mathbb{R})$ en het is duidelijk dat ze alle vier tot $P_3(\mathbb{R})$ behoren. Verder zijn het vier onafhankelijke polynomen want uit $c_1(1-x) + c_2(x-x^2) + c_3(x^2-x^3) + c_4x = 0$ volgt $c_1 + (-c_1 + c_2 + c_4)x + (-c_2 + c_3)x^2 - c_3x^3 = 0$ en dus $c_1 = 0$, $-c_1 + c_2 + c_4 = 0$, $-c_2 + c_3 = 0$ en $-c_3 = 0$. Maar dan moeten alle vier de c_i nul zijn. Conclusie: B is een basis voor $P_3(\mathbb{R})$.
- (d) $1 - x = 1(1-x) + 0(x-x^2) + 0(x^2-x^3) + 0x$, dus $[1-x]_B = (1, 0, 0, 0)^T$.
 $1 - x^2 = 1(1-x) + 1(x-x^2) + 0(x^2-x^3) + 0x$, dus $[1-x^2]_B = (1, 1, 0, 0)^T$.
 $1 - x^3 = 1(1-x) + 1(x-x^2) + 1(x^2-x^3) + 0x$, dus $[1-x^3]_B = (1, 1, 1, 0)^T$.
 $x + x^2 = 0(1-x) - 1(x-x^2) + 0(x^2-x^3) + 2x$, dus $[x+x^2]_B = (0, -1, 0, 2)^T$.

$$\text{Dus } C_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(e) \quad [L]_{B \leftarrow B'} = [L]_{B \leftarrow BB \leftarrow B'} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Nee, want het lineair omhulsel bevat slechts eindige lineaire combinaties van de opspannende vectoren en die combinaties hebben daarom altijd oneindig veel nullen als kentallen. Hieruit volgt dat bijvoorbeeld $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ niet tot het lineair omhulsel behoort, maar wel tot $\mathbb{R}^\infty$.
- (b) Neen, dat komt door het kwadraat. Zo geldt bijvoorbeeld dat $2T(1, 0, 0) \neq T(2 \cdot (1, 0, 0))$. De eerste is namelijk $(2, 2)$ en de tweede $(4, 2)$.
- (c) Ja. Dat kun je op twee manieren laten zien: de inverse afbeelding aangeven of laten zien dat de afbeelding injectief en surjectief is.

De inverse afbeelding is $\mathcal{S} : M_{7,7}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{7,7}(\mathbb{R})$ gedefinieerd door $\mathcal{S}(A) = (AB^{-1})^T$. Ga maar na dat inderdaad $\mathcal{S}(\mathcal{L}(A)) = A$ en $\mathcal{L}(\mathcal{S}(A)) = A$ voor alle 7×7 matrices A .

De afbeelding is injectief omdat de kern slechts uit de nulmatrix bestaat:

$$\mathcal{L}(A) = 0 \iff A^T B = 0 \iff (A^T B)B^{-1} = 0B^{-1} \iff A^T = 0 \iff A = 0.$$

en surjectief omdat elke 7×7 matrix C als beeld voorkomt:

$$\mathcal{L}((CB^{-1})^T) = ((CB^{-1})^T)^T B = CB^{-1}B = C.$$

- (d) Nee, want bijvoorbeeld $f(x) = x^2$ en $g(x) = (x-1)^2$ hebben allebei een nulpunt en behoren dus tot de gegeven verzameling. Echter, $f + g$ heeft geen nulpunten zodat die er niet toe behoort. De verzameling is dus niet gesloten onder optelling.