

Tentamen lineaire algebra, WI 1602

maandag 19 januari 2009, 14.00-16.00/17.00

Antwoorden: elk antwoord dient duidelijk te worden beargumenteerd.

Hulpmiddelen: Er mogen geen hulpmiddelen als mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden. Alleen een rekenmachine die ook op het VWO gebruikt mag worden is toegestaan.

Twee-uurs tentamen: Voor hen die alleen het twee-uurs tentamen willen maken (zie ook drie-uurs tentamen): Voor het twee-uurs tentamen maakt u opgaven 1-4. Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten 4 op te tellen en vervolgens te delen door 4. Het eindcijfer wordt gegeven door het 0.6 keer tentamencijfer bij 0.4 keer het gecombineerde cijfer van de tussentoets en de huiswerkttoets op te tellen.

Drie-uurs tentamen: Voor hen die het drie-uurs tentamen willen maken: Voor het drie-uurs tentamen maakt u alle opgaven. Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het tentamencijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten 6 op te tellen en vervolgens te delen door 6.

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 3 & a^2 & -a \\ 3 & a^2 & 3 \end{pmatrix}$ en de vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, waarbij a en b reële getallen zijn.

- (2) (a) Voor welke waarden van a en b heeft $A\vec{x} = \vec{b}$ géén oplossingen?
- (2) (b) Voor welke waarden van a is de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ injectief (dus 'one-to-one')? Is T dan ook surjectief (dus 'onto')? Beargumenteer!
- (2) (c) Los voor $a = -3$ en $b = 0$.

2. Van de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gegeven dat

$$T(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ en } T(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hierbij is $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- (2) (a) Bepaal $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (2) (b) Bepaal de standaardmatrix van T . Noem deze matrix A_1 .

Op $\mathbb{R}^2$ nemen we de standaardbasis E en de basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

- (2) (c) Bepaal de matrix van T ten opzichte van de basis B . Noem deze matrix A_2 .
- (3) (d) Geef de overgangsmatrix $C_{B,E}$ van de basis B naar de basis E en geef een formule die het verband tussen de matrices A_1 , A_2 en $C_{B,E}$ beschrijft.

3. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ en de vectoren } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) (a) Is $\vec{v}$ een eigenvector van A ? en $\vec{w}$?

- (2) (b) Laat zien dat A precies twee verschillende eigenwaarden heeft. Bepaal ook de algebraïsche multipliciteiten.
- (2) (c) Bepaal voor elk van de eigenwaarden een basis voor bijbehorende eigenruimte.
- (2) (d) Is A diagonaliseerbaar? Zo ja, bepaal een diagonalisering van A (dwz geef een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat $A = PDP^{-1}$). Zo nee, waarom niet.
- (2) (e) Geldt $A = QD'Q^{-1}$ met de matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ en de matrix } D' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}?$$

Vergeet dit niet uit te leggen (kan zonder het matrixproduct uit te rekenen!).

- (2) 4. (a) Welke eigenschappen hebben de matrices Q en R uit een QR -ontbinding van een $m \times n$ -matrix A met onafhankelijke kolommen?
- (2) (b) Toon aan: Als $A = QR$ een QR -ontbinding van A is, dan is de matrix van de orthogonale projectie op de kolomruimte van A gelijk aan QQ^T .

Beschouw de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ en de vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (3) (c) Bepaal een QR -ontbinding van A .
- (2) (d) Bepaal die vector $\vec{w}$ in $\text{Col}(A)$ waarvan de afstand tot $\vec{v}$ minimaal is en bereken deze afstand.
- (2) (e) Geef een basis voor het orthogonale complement van $\text{Col}(A)$.
- (2) 5. (a) Leg met geometrische argumenten uit waarom de afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die een vlak $z = 0$ draait over een hoek van θ graden om de z -as tegen de wijzers van de klok in, een lineaire transformatie is.
- (2) (b) Bepaal de standaard matrix representatie van de afbeelding T .
- (5) (c) Geef de matrix ten opzichte van de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ van de afbeelding T' die een willekeurige vector projecteert op het vlak $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ en deze vervolgens om de normaal roteert tegen de wijzers van de klok in over een hoek van θ graden (de gerooteerde vector ligt dus nog steeds in het vlak). Hint: kies een handige set basisvectoren, bepaal voor deze set basisvectoren de matrix behorend bij de lineaire afbeelding en transformeer vervolgens naar de standaardbasis. Eventuele matrix-matrix producten hoeven niet expliciet uitgerekend te worden.
- (1) 6. (a) Bewijs dat, als de matrix A inverteerbaar is, geldt dat $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- (2) (b) Als A en C $n \times n$ matrices zijn, met C inverteerbaar, bewijs dan dat $\det(A) = \det(C^{-1}AC)$.
- (3) (c) Bewijs dat gelijkvormige matrices ('similar matrices') dezelfde eigenwaarden met dezelfde algebraïsche multipliciteit hebben.
- (3) (d) Laat zien dat eigenvectoren van een reële symmetrische matrix die behoren bij verschillende eigenwaarden orthogonaal zijn.