

Toets lineaire algebra 1, wi1602
dinsdag 3 november 2009, 9.00-10.30 uur.

ELK ANTWOORD DIEN TE WORDEN BEARGUMENTEERD.

Er mogen geen hulpmiddelen als mobiele telefoons, laptops en dergelijke gebruikt worden. Alleen een rekenmachine die ook op het VWO gebruikt mag worden is toegestaan. Hierin mag geen informatie opgeslagen zijn!!

Het aantal te behalen punten is per onderdeel in de kantlijn vermeld. Het Toetscijfer wordt bepaald door bij het aantal behaalde punten drie op te tellen en vervolgens te delen door drie.

1. Gegeven zijn de volgende matrix en vector:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha \\ 2 & 4 & \alpha^2 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

- (3) (a) Onderzoek voor welke α en β het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geen oplossingen heeft.
(2) (b) Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ op voor $\alpha = 2$ en $\beta = 5$.
(1) (c) Voor welke waarden van α is A inverteerbaar?

2. Gegeven is de matrix A die we alvast geveegd hebben tot echelonvorm F (aardig hè?):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F.$$

De kolommen van A noemen we achtereenvolgens $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ en $\mathbf{a}_5$. Ook is gegeven de vector $\mathbf{v} = [0, 1, 2, 0]^T$.

- (2) (a) Bepaal een basis voor de kolomruimte van A .
(2) (b) Geldt $\text{Col } A = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$?
(2) (c) Is $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{v}\}$ een basis voor $\text{Col } A$?

(3) 3. Van een lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is gegeven dat

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Bepaal een formule voor T , wat wil zeggen, bepaal $T([x_1, x_2, x_3])$.

- (2) 4. (a) Bepaal de determinant van de matrix $2A^T A^{-1}$ als A een 4×4 matrix is.
(2) (b) Bepaal de oppervlakte van het parallellogram met hoekpunten $(-1, 1, 1)$, $(0, 3, 4)$, $(2, 4, 8)$ en $(1, 2, 5)$.

5. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ en de vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(2) (a) Is $\mathbf{v}$ een eigenvector van A ?

(2) (b) Is 2 een eigenwaarde van A ?

6. Geef van elk van de volgende uitspraken aan of deze waar of onwaar is. Leg ook uit waarom! In het geval dat een uitspraak niet waar is, betekent dit meestal dat een voorbeeld gegeven moet worden waaruit dat blijkt. Als het waar is moet een bewijs gegeven worden.

(2) (a) Van de vectoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ in $\mathbb{R}^n$ is gegeven dat $\mathbf{v}_3$ geen element is van $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Dan geldt dat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ onafhankelijk is.

(2) (b) De verzameling W bestaat uit alle vectoren uit $\mathbb{R}^2$ waarvan beide kentallen breuken zijn. Is W een deelruimte van $\mathbb{R}^2$?

Uitwerking Toets lineaire algebra 1, wi1602, dinsdag 3 november 2009.

1. (a) Ga na dat

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2\alpha & \beta \\ 2 & 4 & \alpha^2 & 4 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 2\alpha & \beta \\ 0 & -2\alpha + 4 & \alpha^2 - 4\alpha & 4 - 2\beta \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 6 \end{array} \right].$$

Onderscheid nu de gevallen $\alpha = 0$, $\alpha = 2$ en de overige mogelijkheden. Invullen van $\alpha = 0$ levert de aangevulde matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 4 & 0 & 4 - 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right],$$

waaruit direct blijkt dat het stelsel in dit geval voor geen enkele β een oplossing heeft.

Invullen van $\alpha = 2$ en doorvegen tot echelonvorm levert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & \beta \\ 0 & 0 & -4 & 4 - 2\beta \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & \beta \\ 0 & 0 & -4 & 4 - 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 10 - 2\beta \end{array} \right]$$

en dit heeft geen oplossingen als $\beta \neq 5$ en oneindig veel oplossingen als $\beta = 5$.

Voor alle andere α is de eerst gevonden matrix een echelonvorm die in elke rij én in elke kolom (voor de streep) een pivot heeft, zodat het stelsel in die situatie altijd precies één oplossing heeft.

Conclusie: geen oplossingen als $\alpha = 0$ (ongeacht β) of als $\alpha = 2$ en $\beta \neq 5$.

- (b) Substitutie van $\alpha = 2$ en $\beta = 5$ in het bij (a) geveegde stelsel levert

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

zodat x_2 vrij is, $x_1 = -1 - 2x_2$ en $x_3 = \frac{3}{2}$. Dus

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3/2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (c) Een vierkante matrix is inverteerbaar als deze na vegen in elke rij en in elke kolom een pivot heeft. Omdat

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 2\alpha \\ 0 & -2\alpha + 4 & \alpha^2 - 4\alpha \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

is hier alleen voor $\alpha = 0$ en $\alpha = 2$ niet aan voldaan. Conclusie: A is inverteerbaar als $\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq 2$.

2. (a) Hiervoor kun je de kolommen van A nemen die na vegen een pivot krijgen. Uit de gegeven F blijkt dat dit de eerste tweede en vierde kolom zijn. Dus een basis is bijvoorbeeld

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (b) Er geldt $\text{Col } A = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$ en als $\mathbf{a}_4$ een lineaire combinatie is van $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ en $\mathbf{a}_5$, dan is dit gelijk aan $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$. We gaan daarom na of het stelsel $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_4$ oplossingen heeft. Veeg daartoe

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 8 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 15 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Uit de gegeven echelonvorm volgt dat dit rij-equivalent is met

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Het stelsel heeft dus (oneindig veel) oplossingen, waaruit blijkt dat het antwoord op de vraag “ja” is.

- (c) Uit (a) blijkt dat de dimensie van de kolomruimte drie is en dat is gelijk aan het aantal vectoren in $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{v}\}$. Verder zijn de drie vectoren onafhankelijk. Dat is snel met inspectie in te zien: de eerste is niet met de tweede en derde te maken (vanwege de nullen), de tweede niet met de eerste en derde en de derde niet met de eerste en tweede. Natuurlijk kun je dit ook uitzoeken door het aantal oplossingen van het stelsel $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{v} = \mathbf{0}$ te bepalen. Ga maar na dat dit stelsel één oplossing heeft, zodat de vectoren inderdaad onafhankelijk zijn.

Tenslotte geldt dat de drie vectoren allemaal tot $\text{Col } A$ behoren. Van de eerste twee is dat duidelijk. Bij de derde blijkt dat uit het feit dat het stelsel

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oplossingen heeft. Immers

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Uit deze drie feiten volgt dat $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{v}\}$ een basis voor $\text{Col } A$ is.

3. Er geldt (gebruik de lineariteit van T):

$$\begin{aligned}
 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\
 T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{3}T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= T\left(-\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= -T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\
 &= -\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Er volgt

$$\begin{aligned}
 T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= T\left(x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
 &= x_1T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
 &= x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4. (a) $\det(2A^T A^{-1}) = 2^4 \det(A^T A^{-1}) = 2^4 \det(A^T) \det(A^{-1}) = 2^4 \det A \cdot \frac{1}{\det A} = 16$.
 (b) Dit is het parallelogram dat bepaald wordt door de vectoren $\mathbf{b} = [1, 2, 3]^T$ en $\mathbf{c} = [2, 1, 4]^T$.
 De oppervlakte daarvan is

$$\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}.$$

5. (a) Omdat

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\mathbf{v}$$

en omdat $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ is het een eigenvector bij eigenwaarde 0.

- (b) 2 is eigenwaarde als en slechts als het stelsel $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ een niet-nuloplossing heeft.
 Veeg daarom $[A - 2I|\mathbf{0}]$ tot echelonvorm:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right].$$

Dit stelsel heeft dus één oplossing, namelijk $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, waaruit volgt dat 2 géén eigenwaarde is.

6. (a) Niet waar: $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ kunnen afhankelijk zijn. Als dat zo is, is $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ook afhankelijk. Neem bijvoorbeeld in $\mathbb{R}^2$ de vectoren $\mathbf{v}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0)^T$ en $\mathbf{v}_3 = (0, 1)^T$.
- (b) Niet waar: De vector $\mathbf{v} = [1, 1]^T$ behoort bijvoorbeeld tot W , maar de vector $\sqrt{2}\mathbf{v}$ niet. W is dus niet gesloten onder scalaire vermenigvuldiging en dus geen deelruimte van $\mathbb{R}^2$.