

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

1. Zij $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeven door $f(x, y) = |x + y|$. Bewijs of weerleg:

- (2) a. f is surjectief.
(2) b. f is injectief.

Laat Ω een verzameling zijn en laat A, B, C, D deelverzamelingen van Ω zijn. Herinner dat

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ en } b \in B\}.$$

- (2) c. Toon aan dat $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.
(2) d. Geef een voorbeeld van verzamelingen A, B, C, D zó dat $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

2. Beschouw de volgende relatie op $\mathbb{Z}$: $x \sim y$ als er een $m \in \mathbb{Z}$ bestaat zó dat $x + y = 3m$.
Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken voor $\sim$.

- (2) a. $\sim$ is reflexief.
(2) b. $\sim$ is symmetrisch.
(2) c. $\sim$ is transitief.

(2) 3. a. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(x_n)_{n \geq 0}$ *convergeert* naar een getal a als

De rij $(x_n)_{n \geq 0}$ is recursief gedefinieerd als $x_0 = 3$ en $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

- (5) b. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor elke $n \geq 0$ geldt dat $x_n \geq 2$.
(3) c. Bewijs dat $(x_n)_{n \geq 0}$ dalend is.
(3) d. Laat zien dat $(x_n)_{n \geq 0}$ convergent is en bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

4. Laat $a_j = \sqrt{j+1} - \sqrt{j}$ voor elke $j \geq 0$.

- (4) a. Toon met de definitie van “convergentie van een rij” aan dat $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.
(4) b. Toon met de definitie van “convergentie van een reeks” aan dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergent is.
(4) c. Formuleer en bewijs het quotiëntenkenmerk voor reeksen $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ met $c_j > 0$ voor elke $j \geq 0$.

Zie ook de volgende bladzijde.

5. Laat A een niet lege verzameling zijn. Laat $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ begrensde functies zijn en neem aan dat voor alle $x \in A$ geldt dat $g(x) \geq 1$. Definieer de getallen α en β door

$$\alpha = \sup\{f(x) : x \in A\}, \quad \beta = \inf\{g(x) : x \in A\}.$$

Definieer $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ door $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

- (5) a. Toon aan dat $\sup\{h(x) : x \in A\} \leq \frac{\alpha}{\beta}$.
- (2) b. Geef een voorbeeld van een verzameling A en functies f en g als bovenstaand, maar zó dat

$$\sup\{h(x) : x \in A\} \neq \frac{\alpha}{\beta}.$$

- (2) 6. a. Laat D een verzameling zijn. Vul de volgende definitie aan: Een functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is *continu* in een punt $c \in D$ als

Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet Lipschitz continu als een $M \geq 0$ bestaat zó dat voor alle $x, y \in [a, b]$ geldt dat $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

- (3) b. Neem aan dat f Lipschitz continu is. Bewijs dat f continu is.
- (4) c. Neem aan dat f en g beide Lipschitz continue functies zijn. Bewijs dat de productfunctie fg weer Lipschitz continu is.
- Hint:* Gebruik de driehoeksongelijkheid.

7. Gegeven zijn functies $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ voor $n \geq 1$ en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (2) a. Vul de volgende definitie aan: We zeggen dat $(f_n)_{n \geq 0}$ uniform naar f convergeert als

Definieer voor elke $n \geq 1$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ door $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

- (2) b. Toon aan dat $f_n \xrightarrow{p} 0$.

Hint: Gebruik dat $e^{-t} = \frac{1}{e^t} \leq \frac{1}{1+t+t^2}$ voor alle $t \geq 0$.

- (1) c. Laat $n \geq 1$. Bewijs dat f_n een maximum heeft.

- (3) d. Toon aan dat niet geldt dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{7} + 1,$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE