

KORTE ANTWOORDEN TENTAMEN WS 17-01-2013

Hieronder antwoorden op een aantal van de tentamen opgaven.

1c: Kies een vast element $a_0 \in A$. Definieer $g : B \rightarrow A$ als $g(f(a)) = a$ en $g(b) = a_0$ als $b \notin f[A]$. Dan geldt g is een goedgedefinieerde functie. Inderdaad, als $f(a_1) = f(a_2)$, dan geldt $a_1 = a_2$ wegens de injectiviteit van f . Dus ook $g(f(a_1)) = a_1 = a_2 = g(f(a_2))$. Dat g een links-inverse is van f , volgt direct uit de definitie van g .¹

2: Stap 1: Voor $n = 1$ geldt $1! = 1$ en $(1/e)^1 = 1/e \leq 1$, dus de uitspraak is waar voor $n = 1$.

Stap 2: Laat $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neem aan dat $n! \geq (n/e)^n$. Er volgt dat

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)(n/e)^n \quad (*)$$

Bewering $(n+1)(n/e)^n \geq ((n+1)/e)^{n+1}$. Deze bewering en $(*)$ samen geven $(n+1)! \geq ((n+1)/e)^{n+1}$ en dit zou het inductie bewijs voltooien.

Dus het voldoet de bewering te bewijzen. De bewering is equivalent met $n^n \geq (n+1)^n/e$. Dit laatste is equivalent met $e \geq (1 + \frac{1}{n})^n$. Dit laatste is waar en de bewering volgt.

3a. Dit is waar. Definieer $\alpha = \sup\{f(x) : x \in A\}$ en $\beta = \sup\{g(x) : x \in A\}$. Beide bestaat omdat A niet-leeg is en f begrensd is. Voor elke $x \in A$ geldt $f(x) \leq g(x) \leq \beta$. Dus er volgt β is een bovengrens voor $\{f(x) : x \in A\}$. Conclusie $\alpha \leq \beta$.

3b. Dit is niet waar. Een tegenvoorbeeld. Neem $A = [1, \infty)$ en $f(x) = 0$ en $g(x) = 1/x$. Dan geldt voor alle $x \in A$ dat $f(x) < g(x)$. Maar het is eenvoudig in te zien dat $\inf\{f(x) : x \in A\} = 0 = \inf\{g(x) : x \in A\}$.

5b: Kies $\varepsilon = 1$. Kies $R \in [0, \infty)$ zó dat $|f(x)| < \varepsilon$ voor alle $x > R$. Beschouw de functie $h : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $h(x) = f(x)$. De functie h is continu en uit de stelling van Bolzano volgt dat h er een $x_0 \in [0, R]$ bestaat zó dat voor alle $x \in [0, R]$ geldt $h(x) \leq h(x_0)$. In het bijzonder geldt $f(x_0) = h(x_0) \geq h(0) = f(0) = 1$. Bewering: voor alle $x \in [0, \infty)$ geldt dat $f(x) \leq f(x_0)$. Inderdaad, voor $x \in [0, R]$ geldt $f(x) = h(x) \leq h(x_0) = f(x_0)$, en voor $x > R$ geldt $f(x) < 1 \leq f(x_0)$. Conclusie f heeft een maximum in x_0 .

7b: $\Rightarrow$. Neem aan dat $f_n \xrightarrow{u} f$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. We kunnen $N \in \mathbb{N}$ vinden zó dat voor alle $n \geq N$ en alle $x \in D$ geldt $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ geldt $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. Hieruit zien we dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

$\Leftarrow$. Neem aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq N$ geldt $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Er volgt dat voor alle $n \geq N$ en alle $x \in D$ geldt dat $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Dit bewijst $f_n \xrightarrow{u} f$.

7c:² Aangezien $e^t \geq 0$ voor alle $t \geq 0$ en $t \mapsto e^t$ is een stijgende functie vinden we

$$\sup_{x \in [-3, 2010]} |e^{x^2/n} - 1| = \sup_{x \in [-3, 2010]} (e^{x^2/n} - 1) = e^{2010^2/n} - 1 = e^{4000000/n} - 1.$$

Uit de continuïteit van de functie $t \mapsto e^t$ volgt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-3, 2010]} |e^{x^2/n} - 1| = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2010^2/n} - 1 = e^0 - 1 = 0.$$

Met opgave 7b volgt dat $e^{x^2/n}$ op $[-3, 2010]$ uniform naar 1 convergeert. Uit een stelling uit het dictaat volgt dat we integraal en limiet mogen verwisselen. Dus vinden we

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-3}^{2010} e^{x^2/n} dx = \int_{-3}^{2010} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x^2/n} dx = \int_{-3}^{2010} 1 dx = 2013.$$

¹Je kunt ook bewijzen dat surjectieve functies f altijd een rechts inverse hebben

²Merk op dat de primitieve is niet bekend, dus kunnen we niet gebruiken