

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

1. Laat A en B niet-lege verzamelingen zijn en laat $f : A \rightarrow B$ een functie zijn. We noemen een functie $g : B \rightarrow A$ een *rechts-inverse van f* als voor alle $b \in B$ geldt dat $f(g(b)) = b$. We noemen een functie $g : B \rightarrow A$ een *links-inverse van f* als voor alle $a \in A$ geldt dat $g(f(a)) = a$. Toon aan:

- (3) a. als f een rechts-inverse heeft, dan is f surjectief.
- (3) b. als f een links-inverse heeft, dan is f injectief.
- (3) c. als f injectief is, dan heeft f een links-inverse.

(8) 2. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Hint: De rij $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \geq 1}$ is stijgend en convergeert naar het getal e .

3. Zij A een niet-lege verzameling. Laat $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ twee begrensde functies zijn. Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken:

- (4) a. Als $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in A$ dan geldt $\sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$.
- (4) b. Als $f(x) < g(x)$ voor alle $x \in A$ dan geldt $\inf\{f(x) : x \in A\} < \inf\{g(x) : x \in A\}$.

(7) 4. a. Gegeven is een convergente reële rij $(z_n)_{n \geq 0}$ en definieer: $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Bewijs de volgende rekenregel met behulp van de definitie van convergentie:
Als voor alle $n \geq 0$ geldt dat $z_n \leq 0$, dan geldt $z \leq 0$.

(2) b. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(x_n)_{n \geq 0}$ is een *Cauchy rij* als

(2) c. Laat $(x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchy rij zijn en $\alpha \in \mathbb{R}$. Toon met behulp van de definitie aan dat de rij $(\alpha x_n)_{n \geq 0}$ een Cauchy rij is.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (6) 5. a. Formuleer en bewijs de nulpuntstelling.

Gegeven is een continue functie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Neem aan dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ en $f(0) = 1$.

- (5) b. Toon met behulp van de stelling van Bolzano aan dat f een maximum heeft.
- (2) c. Geef een voorbeeld van een functie f die bovenstaande eigenschappen heeft, maar geen minimum heeft.

- (3) 6. a. Laat $(a_j)_{j \geq 0}$ een reële rij zijn en neem aan dat $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ convergent is. Bewijs dat $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$.

- (5) b. Formuleer en bewijs het limietkenmerk voor reeksen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ en $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ met $a_j, b_j > 0$ voor alle $j \geq 0$.

- (5) c. Onderzoek of de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} j \left(-\frac{3}{4}\right)^j$ convergent en/of absoluut convergent is.

7. Gegeven zijn functies $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ voor $n \geq 1$ en $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (2) a. Vul de volgende definitie aan: We zeggen dat $(f_n)_{n \geq 0}$ uniform naar f convergeert als
Notatie: $f_n \xrightarrow{u} f$.

- (4) b. Toon het volgende aan: $f_n \xrightarrow{u} f$ dan en slechts dan als $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

- (4) c. Toon aan dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-3}^{2010} e^{\frac{x^2}{n}} dx = 2013.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{8} + 1.$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE