

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.
- Geef altijd een correcte uitleg. Ook als er alleen om een voorbeeld wordt gevraagd.

- (2) 1. a. Laat A en B verzamelingen zijn. Vul de volgende definitie aan:
Een functie $f : A \rightarrow B$ heet *injectief* als
- (4) b. Gegeven is dat $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ strikt stijgend is. Toon aan dat f injectief is.
- (3) c. Geef een voorbeeld van een strikt stijgende functie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die niet surjectief is.

- (9) 2. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt dat

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$$

- (8) 3. Gegeven zijn twee niet-lege en naar boven begrensde verzamelingen $V, W \subseteq \mathbb{R}$. Definieer

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x = v + w \text{ met } v \in V \text{ en } w \in W\}.$$

Toon aan dat S naar boven begrensd is en dat $\sup S = \sup V + \sup W$.

- (2) 4. a. Vul de volgende definitie aan:
Een rij $(a_n)_{n \geq 0}$ heet *convergent* wanneer er een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap
- (8) b. Gegeven zijn reële rijen $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(y_n)_{n \geq 0}$ en reële getallen $x, y \in \mathbb{R}$. Toon met de definitie van convergentie aan:
als $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = x + y$.
- (8) c. Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass.

Zie ook de volgende bladzijde.

- (2) 5. a. Vul de volgende definitie aan:
Laat $D \subset \mathbb{R}$. Een functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is *continu* als
- (6) b. Laat $D \subset \mathbb{R}$ en neem aan dat er een constante $K > 0$ bestaat zó dat voor alle $x, y \in D$ geldt dat
- $$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$
- Toon aan dat f uniform continu is.
- (6) c. Laat $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ functies zijn en neem aan dat $g(x) = |f(x)|$. Neem aan dat g een maximum en een minimum heeft. Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken:
- (i) f heeft een maximum of een minimum.
- (ii) f heeft een maximum en een minimum.
- (4) 6. a. Toon met behulp van de definitie van convergentie aan dat de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ convergent is en bereken zijn som.
- (4) b. Toon aan dat de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j j^3}{2^j}$ absoluut convergent is.
- (5) c. Formuleer en bewijs het majorantenkenmerk van Weierstrass voor reeksen met positieve termen.
- (2) 7. a. Zij $A \subseteq \mathbb{R}$ en voor elke $n \in \mathbb{N}$ zij $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Laat ook $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn. We zeggen dat de functierij $(f_n)_{n \geq 0}$ *uniform naar f convergeert* als
- (3) b. Geef een voorbeeld van een functierij $(f_n)_{n \geq 0}$ die wel puntsgewijs convergent is maar niet uniform convergent is.
- Laat $(a_j)_{j \geq 0}$ een rij reële getallen zijn. Beschouw voor elke $n \geq 0$ de functie $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door
- $$f_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \sin(jx).$$
- (5) c. Toon aan: Als $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ convergent is, dan geldt dat de rij $(f_n)_{n \geq 0}$ uniform convergent is.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{9} + 1.$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE