

– Geen rekenmachine/telefoon toegestaan

- (3) 1. a. Vul de volgende definitie aan: twee verzamelingen A en B zijn *gelijkmachtig* als
- Vind in elk onderdeel een functie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ met de gevraagde eigenschappen (en bewijs deze)
- (3) b. f is surjectief, maar niet injectief
- (3) c. f is injectief, maar niet surjectief

- (7) 2. a. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt

$$\sum_{j=1}^n j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

- (4) b. Bewijs dat voor $a, b, c \in \mathbb{Z}$ geldt: Als $a|b$ en $a|c$ dan $a|(b+c)$

3. Bewijs met behulp van de axioma's (R0)–(R12) (z.o.z.) de volgende uitspraken:

- (4) a. Als $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dan geldt $a^{-1} + b^{-1} = (a+b)(ab)^{-1}$.
- (4) b. Als voor $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt dat $x < y$ en $z > 0$, dan geldt $xz < yz$.
- (4) 4. a. Formuleer en bewijs de driehoeksongelijkheid.
- (5) b. Laat $A, B \subseteq \mathbb{R}$ niet-lege naar boven begrensde verzamelingen zijn zó dat voor alle $a \in A$ en $b \in B$ geldt dat $a < b$. Bewijs of weerleg: $\sup A \leq \inf B$.

- (2) 5. a. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij $(a_n)_{n \geq 0}$ heet *convergent* wanneer er een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap:

Neem aan dat $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(y_n)_{n \geq 0}$ convergente rijen zijn en definieer

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ en } y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

- (6) b. Bewijs dat $(x_n + y_n)_{n \geq 0}$ convergent is met $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 5}{5}.$$

EINDE

We geven nu een aantal gegevens en axioma's voor $\mathbb{R}$, de verzameling van reële getallen, met optelling en vermenigvuldiging. De gegevens zijn:

- (a) een verzameling $\mathbb{R}$;
- (b) elementen 0 en 1 in $\mathbb{R}$;
- (c) een afbeelding $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- (d) een afbeelding $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- (e) een relatie $>$ op $\mathbb{R}$.

In deze paragraaf zullen we enkel de axioma's voor de optelling en vermenigvuldiging beschouwen, en in de volgende twee paragrafen zullen we de axioma's voor de relatie $>$ geven.

De eerste 9 axioma's zijn identiek aan die voor $\mathbb{Q}$. De optelling voldoet aan

- (R0) de optelling is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $a + b = b + a$;
- (R1) de optelling is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- (R2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $0 + a = a$;
- (R3) additieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $a + b = 0$;

Je kunt eenvoudig bewijzen dat de additieve inverse van $a \in \mathbb{R}$ uniek is, en we noteren deze met $-a$. De vermenigvuldiging voldoet aan:

- (R4) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $ab = ba$;
- (R5) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $(ab)c = a(bc)$;
- (R6) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle $a \in \mathbb{R}$ geldt $1 \cdot a = a$ en $a \cdot 1 = a$;
- (R7) de *distributieve* eigenschap geldt: voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ geldt $a(b + c) = ab + ac$;
- (R8) multiplicatieve inversen bestaan: voor iedere $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$ is er een $b \in \mathbb{R}$ met $ab = 1$;
- (R9) $0 \neq 1$;

Je kunt eenvoudig bewijzen dat de multiplicatieve inverse van $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ uniek is, en we noteren deze met a^{-1} .

De relatie $>$ op $\mathbb{R}$ voldoet aan volgende axioma's:

- (R10) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt precies één van de volgende drie gevallen: $a = b$, of $a > b$, of $b > a$;
- (R11) voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: als $a > 0$ en $b > 0$, dan $a + b > 0$ en $ab > 0$;
- (R12) Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ geldt: $a > b$ dan en slechts dan als $a - b > 0$.

EINDE