

UITWERKING TENTAMEN WISKUNDIGE STRUCTUREN
19-01-2012

1a. Zie dictaat.

1b. Beschouw $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gedefinieerd door $f(x) = 2x + 1$. We moeten aantonen aan dat f een bijectie is. Eerst bewijzen we de injectiviteit. Laat $x, y \in \mathbb{N}$ zo zijn dat $f(x) = f(y)$. Dan volgt $2x + 1 = 2y + 1$. Hieruit volgt $x = y$. Nu bewijzen we nog de surjectiviteit. Laat $a \in A$. Aangezien a oneven is kunnen we a schrijven als $a = 2x + 1$. Er volgt $f(x) = a$. Dus f is surjectief.

2. Stap 1. Voor $n = 1$ geldt $\sum_{j=1}^1 \frac{1}{j^2} = 1$ en $2 - \frac{1}{1} = 1$. Dus de ongelijkheid is waar voor $n = 1$.

Stap 2. Laat $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neem aan dat $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ (inductieveronderstelling). We tonen aan dat

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \quad (*)$$

Uit de inductieveronderstelling volgt dat

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n}.$$

Het voldoet nu om aan te tonen dat $\frac{1}{(n+1)^2} + 2 - \frac{1}{n} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. Dit laatste is equivalent met $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Dit geldt want

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Dus $(*)$ volgt.

Uit Stappen 1 en 2 en het principe van volledige inductie volgt nu het gevraagde.

3a. We onderscheiden twee gevallen: (i) $x \leq 1/3$, (ii) $x > 1/3$.

(i) $x \leq 1/3$. Aangezien $3x - 1 \leq 0$ geldt $|3x - 1| = -(3x - 1) = -3x + 1$. De ongelijkheid is dus hetzelfde als $x + 11 < -3x + 1$. Dit is equivalent met $4x < -10$, en dit is equivalent met $x < -5/2$.

(ii) $x > 1/3$. Aangezien $3x - 1 > 0$ geldt $|3x - 1| = 3x - 1$. De ongelijkheid is dus hetzelfde als $x + 11 < 3x - 1$. Dit is equivalent met $-2x < -12$, en dit is equivalent met $x > 6$.

Uit (i) en (ii) volgt dat de oplossingsverzameling wordt gegeven door $(-\infty, -5/2) \cup (6, \infty)$.

3b. De verzameling V is begrensd. We nemen ook aan dat V niet-leeg is. Dus $\inf V$ bestaat.

De verzameling W is ook niet leeg. We beweren dat W begrensd is. Aangezien V begrensd is, kunnen we een $M \in \mathbb{R}$ vinden zó dat voor alle $v \in V$ geldt $-M \leq v \leq M$. Uit de definitie van W volgt dat we een $v \in V$ kunnen vinden zó dat $w = -6v$. Er volgt $6M \geq w \geq -6M$. Dus inderdaad is W begrensd. Er volgt dat $\sup W$ bestaat.

We bewijzen eerst de ongelijkheid $\sup W \leq -6 \inf V$. Noem $r = \inf V$. Kies $w \in W$ willekeurig. We moeten laten zien dat $w \leq -6r$. Kies $v \in V$ zó dat $w = -6v$. Dan volgt $v = -\frac{1}{6}w$. Uit de definitie van het infimum volgt dat $v \geq r$. Dus $-\frac{1}{6}w \geq r$. Dit impliceert $w \leq -6r$.

We bewijzen de ongelijkheid $\sup W \geq -6 \inf V$. Noem $R = \sup W$. Het voldoet te laten zien dat $\inf V \geq -\frac{1}{6}R$. Kies hiervoor $v \in V$ willekeurig. We moeten laten zien dat $v \geq -\frac{1}{6}R$. Definieer $w = -6v$. Dan geldt $w \in W$. Dus uit de definitie van het supremum volgt dat $w \leq R$. Dus $-6v \leq R$. Dit impliceert dat $v \geq -\frac{1}{6}R$.

4. Zie dictaat.

5a. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $\delta = \varepsilon$. Kies $x \in \mathbb{R} \setminus \{2012\}$ met $-\delta < x - 2012 < 0$ willekeurig. We moeten laten zien dat $|f(x) - (-2012)| < \varepsilon$. Merk op dat $f(x) = \frac{|x-2012|}{x-2012}x = -x$. Merk ook op dat $|x - 2012| < \delta$. Er volgt dat

$$|f(x) - (-2012)| = |-x + 2012| = |x - 2012| < \delta = \varepsilon.$$

Dit bewijst het gevraagde.

5b. Zie dictaat

5c. Er is gegeven dat f waarden neemt binnen de verzameling $[a, b]$. Hieruit volgt in ieder geval $f(a) \geq a$ en $f(b) \leq b$. Er zijn dus drie mogelijkheden: (i) $f(a) = a$, (ii) $f(b) = b$, (iii) $f(a) > a$ en $f(b) < b$. In elk van de gevallen gaan we na dat we een $x \in [a, b]$ kunnen vinden met $f(x) = x$. In geval (i) kunnen we $x = a$ nemen. In geval (ii) kunnen we $x = b$ nemen.

In geval (iii) definiëren $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ als $g(x) = x - f(x)$. Er geldt $g(a) = a - f(a) < 0$ en $g(b) = b - f(b) > 0$. Dus uit de nulpuntstelling volgt dat er een $x \in (a, b)$ is zó dat $g(x) = 0$. Voor deze x volgt dat $x - f(x) = g(x) = 0$, dus $f(x) = x$.

6a. Zie dictaat

6b. We gebruiken het quotiëntenkenmerk met $a_j = \frac{j^3+5j^2}{2^j}$ voor $j \geq 0$. Er geldt voor alle $j \geq 1$ dat

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{\frac{(j+1)^3+5(j+1)^2}{2^{j+1}}}{\frac{j^3+5j^2}{2^j}} = \frac{1}{2} \frac{(j+1)^3+5(j+1)^2}{j^3+5j^2} = \frac{1}{2} \frac{\left(1+\frac{1}{j}\right)^3 + \frac{5}{j}\left(1+\frac{1}{j}\right)^2}{1+\frac{5}{j}}.$$

Hieruit volgt met behulp van de rekenregels voor limieten dat

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{1}{2} \frac{1^3+0 \cdot 1^2}{1+0} = \frac{1}{2}.$$

Aangezien $\frac{1}{2} < 1$, geeft het quotiëntenkenmerk dat de reeks convergent is.

6c. We onderzoeken eerst de absolute convergentie. Er geldt $\sum_{j=1}^{\infty} \left| (-1)^j \frac{1}{\sqrt{j}} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p}$ met $p = 1/2$. Aangezien $p \leq 1$ volgt dat deze laatste reeks divergent is. Dus de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{\sqrt{j}}$ is niet absoluut convergent.

We onderzoeken de convergentie van $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{\sqrt{j}}$. Dit is een alternerende reeks. De termen $\frac{1}{\sqrt{j}}$ dalen naar nul. Dus uit het convergentie kenmerk van Leibniz volgt dat de reeks convergent is.

7a. Kies $x \in [1, 2]$. Er geldt

$$f_n(x) = \frac{3n - 2nx}{x^6 + n} = \frac{3 - 2x}{\frac{x^6}{n} + 1}$$

Dus volgt uit de rekenregels voor limieten dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x}{\frac{x^6}{n} + 1} = 3 - 2x = f(x).$$

7b. De definitie is te vinden in het dictaat. Merk op dat

$$f_n(x) - f(x) = \frac{3n - 2nx}{x^6 + n} - \frac{(3 - 2x)(x^6 + n)}{x^6 + n} = \frac{3n - 2nx - (3 - 2x)(x^6 + n)}{x^6 + n} = \frac{2x^7 - 3x^6}{x^6 + n}.$$

Kies nu $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $N \in \mathbb{N}$ zó dat $N > \frac{640}{\varepsilon}$. Er volgt dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ en voor alle $x \in [1, 2]$ geldt dat

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{2x^7 - 3x^6}{x^6 + n} \right| = \frac{|2x^7 - 3x^6|}{x^6 + n} \leq \frac{|2x^7| + |3x^6|}{x^6 + n} \leq \frac{256 + 384}{n} = \frac{640}{n} \leq \frac{640}{N} < \varepsilon.$$

7c. Aangezien $f_n \xrightarrow{u} f$ en f_n en f zijn beide integreerbaar, volgt uit een stelling van het dictaat dat integraal en limiet verwisseld mogen worden. Er volgt dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{3n - 2nx}{x^6 + n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 f(x) dx.$$

Ten slotte geldt dat $\int_1^2 f(x) dx = \left[3x - x^2 \right]_1^2 = 6 - 4 - (3 - 1) = 0$.