

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

- (2) 1. a. Vul de volgende definitie aan: Een verzameling A heet *aftelbaar oneindig* als
- (6) b. Toon aan dat de verzameling $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ is oneven}\}$ aftelbaar oneindig is. Bewijs hierbij al je uitspraken.

- (9) 2. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geldt dat

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

- (5) 3. a. Vind alle oplossingen van de ongelijkheid $x + 11 < |3x - 1|$ met $x \in \mathbb{R}$.
- (5) b. Laat $V \subseteq \mathbb{R}$ een begrensde verzameling zijn. Definieer $W = \{-6 \cdot v : v \in V\}$. Toon met behulp van de definities aan dat

$$\sup W = -6 \cdot \inf V$$

- (8) 4. a. Gegeven zijn reële rijen $(x_n)_{n \geq 0}$ en $(y_n)_{n \geq 0}$. Toon met de definitie van convergentie aan: als $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ en $(y_n)_{n \geq 0}$ is begrensd, dan geldt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.
- (2) b. Vul de volgende definitie aan:
een rij $(a_n)_{n \geq 0}$ is een *Cauchy rij* als
- (8) c. Formuleer en bewijs de volledigheidstelling.

- (5) 5. a. Definieer $f : \mathbb{R} \setminus \{2012\} \rightarrow \mathbb{R}$ als $f(x) = \frac{|x-2012|}{x-2012}x$. Toon met behulp van de definitie van een limiet aan dat $\lim_{x \uparrow 2012} f(x) = -2012$.
- (2) b. Vul de volgende definitie aan:
Laat $D \subset \mathbb{R}$. Een functie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ is *uniform continu* als
- (6) c. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Zij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie met $f\left[\frac{a+b}{2}, b\right] \subseteq [a, b]$. Toon aan dat er een $x \in [a, b]$ is zó dat $f(x) = x$.
Hint: Gebruik de nulpuntstelling.

- (3) 6. a. Geef de definitie van convergentie van $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, waarbij $(a_j)_{j \geq 0}$ een rij reële getallen is.

- (5) b. Onderzoek of de reeks $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^3 + 5j^2}{2^j}$ convergent is.

- (5) c. Onderzoek of de reeks $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{\sqrt{j}}$ convergent en/of absoluut convergent is.

7. Beschouw de functierij $(f_n)_{n \geq 0}$ met $f_n : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f_n(x) = \frac{3n - 2nx}{x^6 + n}$$

en definieer $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = 3 - 2x$

- (2) a. Laat zien dat $f_n \xrightarrow{p} f$.
- (6) b. Formuleer de definitie van uniforme convergentie en laat hiermee zien dat $f_n \xrightarrow{u} f$.
Tip: Ga *niet* differentiëren. Gebruik dat het domein $[1, 2]$ is.
- (2) c. Leg uit waarom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{3n - 2nx}{x^6 + n} dx = 0.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{9} + 1.$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE