

– Geen rekenmachine/telefoon toegestaan

---

1. Laat  $A$  en  $B$  verzamelingen en  $f : A \rightarrow B$  een functie zijn. Herinner dat voor  $V \subseteq A$  de verzameling  $f[V]$  gedefinieerd is als  $f[V] = \{f(v) : v \in V\}$ .
- (3) a. Laat zien dat voor elke  $C, D \subseteq A$  geldt dat
- $$f[C \cap D] \subseteq f[C] \cap f[D].$$
- (3) b. Vul de volgende definitie aan:  $f$  is *injectief* als .....
- (5) c. Neem aan dat  $f : A \rightarrow B$  injectief is. Laat zien dat voor elke  $C, D \subseteq A$  geldt dat

$$f[C \cap D] = f[C] \cap f[D].$$

- (10) 2. Bewijs met behulp van volledige inductie dat voor alle  $n \in \mathbb{N}$  en voor alle  $x \in \mathbb{R}$  met  $x > -1$  geldt

$$\frac{1}{(1+x)^n} \geq 1 - nx.$$

3. Bewijs met behulp van de axioma's (Z0)–(Z7) (z.o.z.) de volgende uitspraken:
- (5) a. Zij  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Als  $a + c = b + c$  dan  $a = b$ .
- (5) b. Voor alle  $a \in \mathbb{Z}$  geldt  $a \cdot 0 = 0$ .
- (10) 4. Definieer  $V = \left\{1 + \frac{1}{x+1} : x \in \mathbb{R} \text{ met } x \geq 0\right\}$ . Bereken (indien bestaat) het volgende:
- a.  $\sup V$     b.  $\inf V$     c.  $\max V$     d.  $\min V$ .

Geef ook de bewijzen van elk van je uitspraken

- (3) 5. a. Vul de volgende definitie aan: Een reële rij  $(a_n)_{n \geq 0}$  heet *convergent* wanneer er een  $a \in \mathbb{R}$  bestaat met de volgende eigenschap: .....

Neem aan dat  $(x_n)_{n > 0}$  en  $(y_n)_{n > 0}$  convergente rijen zijn en definieer

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ en } y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken.

- (5) b. Als voor elke  $n \geq 0$  geldt dat  $x_n \leq y_n$ , dan geldt  $x \leq y$ .
- (5) c. Als voor elke  $n \geq 0$  geldt dat  $x_n < y_n$ , dan geldt  $x < y$ .

---

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het cijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{Totaal} + 6}{6}.$$

EINDE

De *gegevens* zijn:

- (a) een verzameling  $\mathbb{Z}$ ;
- (b) elementen 0 en 1 in  $\mathbb{Z}$ ;
- (c) een afbeelding  $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , de optelling;
- (d) een afbeelding  $\cdot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , de vermenigvuldiging.

We schrijven meestal  $ab$  voor  $a \cdot b$ .

De optelling en de vermenigvuldiging voldoen aan de volgende *eigenschappen*:

- (Z0) de optelling is *commutatief*: voor alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  geldt  $a + b = b + a$ ;
- (Z1) de optelling is *associatief*: voor alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  geldt  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- (Z2) 0 is *neutraal* voor de optelling, d.w.z., voor alle  $a \in \mathbb{Z}$  geldt  $0 + a = a$  en  $a + 0 = a$ ;
- (Z3) additieve inversen bestaan: voor alle  $a \in \mathbb{Z}$  bestaat er een  $b \in \mathbb{Z}$  zodat  $a + b = 0$ .
- (Z4) de vermenigvuldiging is *commutatief*: voor alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  geldt  $ab = ba$ ;
- (Z5) de vermenigvuldiging is *associatief*: voor alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  geldt  $(ab)c = a(bc)$ ;
- (Z6) 1 is *neutraal* voor de vermenigvuldiging, d.w.z., voor alle  $a, b \in \mathbb{Z}$  geldt  $1 \cdot a = a$ ;
- (Z7) de *distributieve* eigenschap geldt: voor alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  geldt  $a(b + c) = ab + ac$ ;

EINDE