

- Geen rekenmachine/telefoon toegestaan
- Geen grafieken/plaatjes/Venn-diagrammen in de antwoorden toegestaan.
- Geef aan welke stellingen uit het dictaat je gebruikt.

1. Laat A, B en C verzamelingen zijn. Laat $f : A \rightarrow B$ en $g : B \rightarrow C$ functies zijn. Laat $h = g \circ f$. Bewijs de volgende uitspraken:

- (3) a. Als f en g injectief zijn, dan is h injectief
- (3) b. Als f en g surjectief zijn, dan is h surjectief.

(4) 2. Zij $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Toon met behulp van volledige inductie aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \sum_{j=0}^n x^j.$$

3. Voor $a, b \in \mathbb{Z}$ zeggen we dat $a|b$ als er een $x \in \mathbb{Z}$ is met $ax = b$. Definieer een relatie $\sim$ op $\mathbb{Z}$ door $a \sim b$ als $a|b$. Bewijs of weerleg elk van de volgende uitspraken:

- (2) a. De relatie $\sim$ is reflexief.
- (2) b. De relatie $\sim$ is symmetrisch.
- (2) c. De relatie $\sim$ is transitief.

(5) 4. Formuleer en bewijs de monotone convergentiestelling voor rijen.

(4) 5. Bewijs met behulp van de ongelijkheid van Bernoulli dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

Zie ook de volgende bladzijde.

- (2) 6. a. Formuleer het majoranten kenmerk voor reeksen.
- (3) b. Toon aan dat $\left(\sum_{k=1}^n 3^{-k} \sin(k^2)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent is.
- (3) 7. a. Toon met behulp van de definitie aan dat $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = 1/x$ niet uniform continu is.
- (3) b. Zij $A \subseteq \mathbb{R}$. Laat $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu en begrensd zijn. Toon aan dat $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = f(x)g(x)$ uniform continu is.
- (3) 8. Geef de definitie van de bovenintegraal van een begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en leg hierbij ook uit wat een bovensom is.
- (3) 9. a. Definieer $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ door $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Bewijs dat $f_n \xrightarrow{u} 0$.
- (3) b. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat voor elke $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare functie zijn. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een Riemann integreerbare functie zijn. Toon aan: als $f_n \xrightarrow{u} f$, dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

De waardering voor elke vraag staat in de kantlijn; het tentamencijfer wordt berekend volgens de formule

$$\text{Tentamencijfer} = \frac{\text{Totaal}}{5} + 1.$$

en afgerond op halve cijfers.

EINDE